201810834

量子力学第19回　相原 大地

j=1/2の回転行列

$$R(\alpha,\beta,\gamma)|jm\rangle = |jm'\rangle[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}$$

$$\langle jm'|R|jm\rangle = \langle jm'|e^{-iJ_z\alpha}e^{-iJ_y\beta}e^{-iJ_z\gamma}|jm\rangle$$

$$= e^{-im'\alpha}\langle jm'|e^{-iJ_y\beta}|jm\rangle e^{-im\gamma}$$

$$= [D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm}$$

$$[D^j(R(\alpha,\beta,\gamma))]_{m'm} = e^{-im'\alpha}d^j_{m'm}e^{-im\gamma}$$

$$d^j_{m'm} = \langle jm'|e^{-iJ_y\beta}|jm\rangle$$

$$d^j_{m'm} = \sum_k(-1)^{k-m+m'}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!k!(k-m+m')!(j-k-m')!}\times\cos^{2j-2k+m-m'}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-m+m'}\frac{\beta}{2}$$

( )!の( )内が0以上の和

j=1/2のときは

$m'=m=1/2$

$$d^{1/2}_{1/2,1/2} = \sum_{k=0}^{0}(-1)^k\frac{\sqrt{(\frac12+\frac12)!(\frac12-\frac12)!(\frac12+\frac12)!(\frac12-\frac12)!}}{(\frac12+\frac12-k)!k!(k-\frac12+\frac12)!\underbrace{(\frac12-k-\frac12)!}_{(-k)!}}\times\cos^{1-2k+\frac12-\frac12}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-\frac12+\frac12}\frac{\beta}{2}$$

$$= \cos\frac{\beta}{2}$$

$m'=1/2,\ m=-1/2$

$$d^{1/2}_{1/2,-1/2} = \sum_{k=0}^{0}(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{(\frac12-\frac12)!(\frac12+\frac12)!(\frac12+\frac12)!(\frac12-\frac12)!}}{\underbrace{(\frac12-\frac12-k)!}_{(-k)!}k!(k+\frac12+\frac12)!(\frac12-k-\frac12)!}\times\cos^{1-2k-\frac12-\frac12}\frac{\beta}{2}\sin^{2k+\frac12+\frac12}\frac{\beta}{2}$$

$$= -\sin\frac{\beta}{2}$$

$m'=-1/2,\ m=1/2$

$$d^{1/2}_{-1/2,1/2} = \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k-1}\frac{\sqrt{(\frac12+\frac12)!(\frac12-\frac12)!(\frac12-\frac12)!(\frac12+\frac12)!}}{\underbrace{(\frac12+\frac12-k)!}_{(1-k)!}k!\underbrace{(k-\frac12-\frac12)!}_{(k-1)!}(\frac12-k+\frac12)!}\times\cos^{1-2k+\frac12+\frac12}\frac{\beta}{2}\sin^{2k-\frac12-\frac12}\frac{\beta}{2}$$

$$= \sin\frac{\beta}{2}$$

$m'=m=-1/2$

$$d^{1/2}_{-1/2,-1/2} = \sum_{k=0}^{0}(-1)^k\frac{\sqrt{(\frac12-\frac12)!(\frac12+\frac12)!(\frac12-\frac12)!(\frac12+\frac12)!}}{\underbrace{(\frac12-\frac12-k)!}_{(-k)!}k!(k+\frac12-\frac12)!(\frac12-k+\frac12)!}\times\cos^{1-2k-\frac12+\frac12}\frac{\beta}{2}\sin^{2k+\frac12-\frac12}\frac{\beta}{2}$$

$$= \cos\frac{\beta}{2}$$

$$d^{1/2} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m=1/2 & m=-1/2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} m'=1/2 \ \uparrow \\ m'=-1/2 \ \downarrow \end{array} \end{array}$$

$$D^{1/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{1}{2}\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}\gamma} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{1}{2}\gamma} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= e^{-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z} e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma_y} e^{-i\frac{\alpha}{2}\sigma_z}$$

Unitary表現であるから、

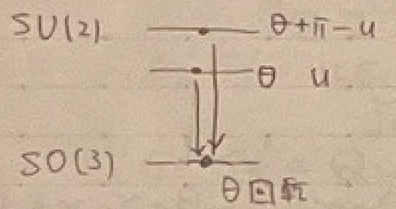
$$\left.\begin{array}{l} [D^{1/2}]^{-1} = [D^{1/2}]^{\dagger} \\ \det D^{1/2} = \cos^2\frac{\beta}{2} - (-\sin^2\frac{\beta}{2}) = 1 \end{array}\right\} D^{1/2} \in SU(2)$$

$\vec{n}$ ($|\vec{n}|=1$) 軸周りの θ 回転

★ $e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = E_2\cos\frac{\theta}{2} - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2} \in SU(2)$

同じ回転を2種類に表す　$\theta+2\pi$ 回転

$$e^{-i\frac{\theta+2\pi}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = E_2\cos(\tfrac{\theta}{2}+\pi) - i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin(\tfrac{\theta}{2}+\pi)$$
$$= -e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}$$



$SO(3) \rightleftarrows SU(2)$ の対応は1対2

⇒ $j=1/2$ の時の表現は2価であるといい、この表現を2価表現という

spin1/2ではもとに戻るためには 4π 回転必要（実験で確認）

一般に $|\vec{n}|=1$ なるベクトル $\vec{n}$ に対し、

$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = |\vec{n}|^2 E = E \leftarrow (\vec{A}\cdot\vec{\sigma})(\vec{B}\cdot\vec{\sigma}) = \vec{A}\cdot\vec{B}\,E + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = P_+ - P_-$

$P_\pm = \frac{1}{2}(E_2 \pm \vec{n}\cdot\vec{\sigma})$ と書く

projection
$$\begin{cases} P_\pm^2 = \frac{1}{4}(E_2 \pm \vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = \frac{1}{4}(E_2 \pm 2\vec{n}\cdot\vec{\sigma} + E_2) \\ \qquad = \frac{1}{2}(E_2 \pm \vec{n}\cdot\vec{\sigma}) = P_\pm = P_\pm^{\dagger} \\ P_+ + P_- = E_2 \\ P_+P_- = \frac{1}{4}(E_2 + \vec{n}\cdot\vec{\sigma})(E_2 - \vec{n}\cdot\vec{\sigma}) = \frac{1}{4}(E_2 - E_2) = 0 \end{cases}$$

よって、関数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ なる関数に関して

$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2=(P_+-P_-)^2=P_+^2-P_+P_--P_-P_++(-1)^2P_-$$
$$=P_++(-1)^2P_-$$
$$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^n=P_++(-1)^nP_-$$
$$\therefore f(a\vec{n}\cdot\vec{\sigma})=a_0(P_++P_-)+a_1(P_+-P_-)+a_2(P_++P_-)+\cdots$$
$$=f(a)P_++f(-a)P_-$$

$f(x)=e^{-i\frac{\theta}{2}x}$ とすれば $(a=-i\frac{\theta}{2})$

$$e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}=e^{-i\frac{\theta}{2}}P_++e^{i\frac{\theta}{2}}P_-$$
$$=e^{-i\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}(E_2+\vec{n}\cdot\vec{\sigma})+e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{1}{2}(E_2-\vec{n}\cdot\vec{\sigma})$$
$$=E_2\cos\frac{\theta}{2}-i\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}$$

3次元球面

$SU(2)\simeq S^3$ について

$$D^{1/2}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$
$$\det D^{1/2}=1=|a|^2+|b|^2$$

とも書ける(ケーリー・クラインパラメータ)。なお

$$a=e^{-i\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\frac{\beta}{2}$$
$$b=-e^{-i\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\frac{\beta}{2}$$

また、4つの実数を $\mathrm{Re}\,\alpha=x_1$, $\mathrm{Im}\,\alpha=x_2$, $\mathrm{Re}\,\beta=x_3$, $\mathrm{Im}\,\beta=x_4$ とすると、

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1$$

となり、(x_1,x_2,x_3,x_4) は4次元空間内の3次元球面 S^3 をつくる。

つまり $SU(2)\simeq S^3$

これは2次元平面内の単位円(1次元球面) S^1

$$z=e^{i\theta}=x+iy$$
$$|z|^2=1=x^2+y^2$$

が $U(1)$ と同相なことに対応する $U(1)\simeq S^1$

SU(2)→SO(3)の対応

$j=1/2$ のspin表現はSO(3)の表現であったから、SO(3)→SU(2)の対応が具体的に与えられているが、逆に

$u = e^{-i\frac{\theta}{2}\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} \in SU(2)$ に対し、$\vec{\sigma}' \equiv u\vec{\sigma}u^\dagger$ とすると、

$(\vec{\sigma}')^\dagger = (u^\dagger)^\dagger\vec{\sigma}^\dagger u^\dagger = u\vec{\sigma}u^\dagger = \vec{\sigma}'$ ∴ $(\sigma'_\alpha)^\dagger = \sigma'_\alpha$

$(\sigma'_\alpha)^2 = u\sigma_\alpha u^\dagger u\sigma_\alpha u^\dagger = u\sigma_\alpha^2 u^\dagger = uu^\dagger = E_2$

$\alpha \neq \beta$ のとき、
$$\begin{aligned}\sigma'_\alpha\sigma'_\beta &= u\sigma_\alpha u^\dagger u\sigma_\beta u^\dagger \\ &= u\sigma_\alpha\sigma_\beta u^\dagger \\ &= iu\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma_\gamma u^\dagger = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\sigma'_\gamma\end{aligned}$$

$\mathrm{Tr}\,\vec{\sigma}' = \mathrm{Tr}\,u\vec{\sigma}u^\dagger = \mathrm{Tr}\,u^\dagger u\vec{\sigma} = \mathrm{Tr}\,\vec{\sigma} = 0$

よって、Pauli行列の実係数の線形和として次のように展開できる

$\sigma'_\alpha = Q_{\alpha\beta}\sigma_\beta \quad Q_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$

さらに
$$\begin{aligned}\{\sigma'_\alpha, \sigma'_\beta\} &= Q_{\alpha\alpha'}Q_{\beta\beta'}\{\sigma_{\alpha'}, \sigma_{\beta'}\} \\ &= Q_{\alpha\alpha'}Q_{\beta\beta'}\,2\delta_{\alpha'\beta'} \\ &= 2Q_{\alpha\gamma}Q_{\beta\gamma} \\ &= 2\delta_{\alpha\beta}\end{aligned}$$
$\rightarrow Q\tilde{Q} = E_3$ 　Q:直交

さらに $\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3 = u\underbrace{\sigma_1\sigma_2}_{i\sigma_3}\sigma_3u^\dagger = iuu^\dagger = iE_2$

また
$$\begin{aligned}\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3 &= Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma \\ &= \sum_\gamma\Big[\sum_{\alpha(=\beta)}\underbrace{(Q_{1\alpha}Q_{2\alpha})}_{(Q\tilde{Q})_{12} = (E_3)_{12} = 0}Q_{3\gamma}\sigma_\gamma + \sum_{\alpha\neq\beta}Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\Big]\end{aligned}$$

β, γ についても同様
$\beta \neq \gamma$ のみ残る

$$= \sum_{\underbrace{(\alpha,\beta,\gamma) = P(123)}_{123\text{の置換(すべて異なる)}}} Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma$$

$$= \sum_{(\alpha\beta\gamma) = P(123)} Q_{1\alpha}Q_{2\beta}Q_{3\gamma}\,iE_2\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$$

$$= iE_2\det Q$$

よって、$\det Q = 1$ 　直交行列かつ $\det Q = 1$

$SU(2) \ni u \rightarrow Q \in SO(3)$

$\pm u \rightarrow Q$ ：2対1