

回転群の表現  $R(\alpha, \beta, \sigma) = e^{-iJ_z\alpha} e^{-iJ_y\beta} e^{-iJ_z\sigma}$

一般に回転操作  $R = e^{-i\theta \vec{n} \cdot \vec{J}}$  に対し,  $|m\rangle = |\psi_m\rangle$

$R\psi = \psi D(R)$   $\psi = (|j\rangle, |j+1\rangle, \dots, |j\rangle)$   $j = 0, 1, 2, \dots, 1/2, 3/2, \dots$

となるが, 特許に無限小変換  $R = 1 - i\theta \vec{n} \cdot \vec{J}$  に対してその変換行列つまり回転群の表現は基底と  $\vec{J}$  の行列要素を与えることで定まる。

$J_z |\psi_m\rangle = m |\psi_m\rangle$   $\hbar = 1$

$J_{\pm} |\psi_m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)} |\psi_{m \pm 1}\rangle$

$\langle \psi_{m'} | J_z | \psi_m \rangle = \delta_{m' m} m$

$\langle \psi_{m'} | J_{\pm} | \psi_m \rangle = \delta_{m' m \pm 1} \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}$

となる基底  $|\psi_m\rangle$ ,  $m = -j, \dots, j$  をこれらは"これは完全であり回転群の基底となる。この基底が与える表現を回転群の spin  $j$  表現という。この表現の次元は  $2j+1$  である。

$R_1 \psi = \psi D^j(R_1)$ ,  $R_2 \psi = \psi D^j(R_2)$   $\{ D^j(R_2 R_1) = D^j(R_2) D^j(R_1) \}$   
 $\rightarrow R_2 R_1 \psi = \psi D^j(R_2 R_1)$

このとき, 一般の回転角の回転群の元をオイラー角により

$R(\alpha, \beta, \sigma) = e^{-iJ_z\alpha} e^{-iJ_y\beta} e^{-iJ_z\sigma}$  とかけば,

$R(\alpha, \beta, \sigma) |j m\rangle = |j m'\rangle [D^j(R(\alpha, \beta, \sigma))]_{m' m}$

$\langle j m' | \rightarrow \langle j m' | R | j m \rangle = \langle j m' | e^{-iJ_z\alpha} e^{-iJ_y\beta} e^{-iJ_z\sigma} | j m \rangle$   $J_z |j m\rangle = m |j m\rangle$   
 $= e^{-im\alpha} \langle j m' | e^{-iJ_y\beta} | j m \rangle e^{-im\sigma}$   
 $= [D^j(R(\alpha, \beta, \sigma))]_{m' m}$

非自明なのは  $J_y$  からの寄与だから,

$[D^j(R(\alpha, \beta, \sigma))]_{m' m} = e^{-im\alpha} d^j_{m' m} e^{-im\sigma}$

$d^j_{m' m} = \langle j m' | e^{-iJ_y\beta} | j m \rangle$   
 = "非自明"

$d^j_{m' m} = \frac{1}{[(j+m)(j-m)]^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+m+m'} \binom{j+m}{k} \binom{j-m}{j-k-m'} \sqrt{(j+m')!(j-m')!}$   
 $\times \cos^{2j-2k+m-m'} \frac{\beta}{2} \sin^{2k-m+m'} \frac{\beta}{2}$   $\binom{n}{m} = n C_m = \begin{cases} \frac{n!}{(n-m)!m!} & 0 \leq m \leq n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$   
 $= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-m+m'} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)! k! (k-m+m')! (j-k-m')!}$   
 $\times \cos^{2j-2k+m-m'} \frac{\beta}{2} \sin^{2k-m+m'} \frac{\beta}{2}$

フレイッシュ・ゴールドン係数と回転群の積表現

spin  $j$  表現の基底  $\psi^j$  とし

$$\psi^j = (|j, -j\rangle, |j, -j+1\rangle, \dots, |j, j\rangle) \quad |j, m\rangle \quad m = \underbrace{-j, \dots, j}_{2j+1}$$

$$R\psi^j = \psi^j D^j(R)$$

と対応。" = " spin  $j_1$  表現と spin  $j_2$  表現の基底関数を  $|j_1, m_1\rangle, |j_2, m_2\rangle$  とすれば、

$$R|j_1, m_1\rangle_1 = |j_1, m'_1\rangle_1 D_{m'_1, m_1}^{j_1}(R) \quad R|j_2, m_2\rangle_2 = |j_2, m'_2\rangle_2 D_{m'_2, m_2}^{j_2}(R)$$

これらから  $R$  のテンソル積の基底に対して

$$|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle_1 |j_2, m_2\rangle_2 = |j_1, m_1\rangle_1 \otimes |j_2, m_2\rangle_2$$

複合添字  $m_1, m_2$  を使って回転  $R$  に対して新しい表現行列を次のように定める

$$R|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m'_1, j_2, m'_2\rangle D_{m'_1, m'_2, m_1, m_2}(R)$$

$$D_{m'_1, m'_2, m_1, m_2}(R) = D_{m'_1, m_1}^{j_1}(R) D_{m'_2, m_2}^{j_2}(R)$$

これが表現と対応することは次のように確認できる。

$$R_2 R_1 |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m''_1\rangle_1 D_{m''_1, m'_1}^{j_1}(R_2) D_{m'_1, m_1}^{j_1}(R_1)$$

$$\otimes |j_2, m''_2\rangle_2 D_{m''_2, m'_2}^{j_2}(R_2) D_{m'_2, m_2}^{j_2}(R_1)$$

$$= |j_1, m'_1\rangle_1 D_{m'_1, m_1}^{j_1}(R_2 R_1) \otimes |j_2, m'_2\rangle_2 D_{m'_2, m_2}^{j_2}(R_2 R_1)$$

$$= |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle D_{m'_1, m'_2, m_1, m_2}(R_2 R_1)$$

この表現  $D(R)$  は  $(2j_1+1)(2j_2+1)$ -次元の表現で積表現と呼ぶ。積表現  $R|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m'_1, j_2, m'_2\rangle D_{m'_1, m'_2, m_1, m_2}^{j_1, j_2}(R)$

$$CG \text{ 係数 } |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j, m\rangle \langle j, m | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

" = "  $|j, m\rangle$  が spin  $j$  表現に属することに注意すれば CG 係数を使って

$|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$  の変換は次のようにかける。

$$R|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = R|j, m\rangle \langle j, m | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j, m'\rangle D_{m', m}^j(R) \langle j, m | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

よって  $R$  を略して

$$|j_1, m'_1, j_2, m'_2\rangle D_{m'_1, m'_2, m_1, m_2}^{j_1, j_2} = |j, m'\rangle D_{m', m}^j \langle j, m | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$$= \text{左から } \langle j_1, m'_1, j_2, m'_2 | \text{ をかけると, } \langle j_1, m'_1, j_2, m'_2 | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2} \text{ より}$$

$$D_{m'_1, m'_2, m_1, m_2}^{j_1, j_2} = \langle j_1, m'_1, j_2, m'_2 | j, m\rangle D_{m', m}^j \langle j, m | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

CG 係数はその構成法から実数から、

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle = \langle j, m | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \text{ であり, } \text{TXF のようにかける。}$$

$$D_{m'_1 m_1}^{\bar{j}_1} D_{m'_2 m_2}^{\bar{j}_2} = D_{m' m}^{\bar{j}} \langle \bar{j} m' | \bar{j}_1 m'_1 \bar{j}_2 m'_2 \rangle \langle \bar{j} m | \bar{j}_1 m_1 \bar{j}_2 m_2 \rangle$$

$$D_{m'_1 m_1}^{\bar{j}_1} D_{m'_2 m_2}^{\bar{j}_2} = \langle \bar{j}_1 m'_1 \bar{j}_2 m'_2 | \bar{j} m' \rangle \langle \bar{j}_1 m_1 \bar{j}_2 m_2 | \bar{j} m \rangle D_{m' m}^{\bar{j}}$$