量子力学3　第17回講義まとめ

201810855　佐藤 綾香

回転操作の作る群

連続群としての回転

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = R\mathbf{r}$$
$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ここで、行列 R（回転行列）は

$$R \in SO(3)$$
$$\tilde{R}R = E_3$$
$$\det R = 1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = \tilde{\mathbf{r}}\mathbf{r} \\ x'^2+y'^2+z'^2 = \tilde{\mathbf{r}}'\mathbf{r}' = \tilde{\mathbf{r}}\tilde{R}R\mathbf{r} \end{cases}$$

$|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}|$ → 回転は長さを変えない。

<u>回転軸の存在</u>

$$\begin{aligned} \det(R-E_3) &= \det(\tilde{R}-E_3) = \det(R^{-1}-E_3) \\ &= \det R^{-1}(E_3 - R) \\ &= \det R^{-1} \det(E_3-R) \\ &= (-1)^3 \det(R-E_3) \\ &= -\det(R-E_3) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \det R = 1 \\ \det R^{-1} = 1 \\ \det(aA) = a^n \det A \end{pmatrix}$$

よって、$\det(R-E_3) = 0$ であり → $\det R$ が固有値1をもつ。

$$R\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

つまり、$\mathbf{u}$ 上の点は回転で不変、つまり $\mathbf{u}$ は回転軸となる。

以後回転を、回転軸 $\mathbf{u}$ と回転角 α で $R_\alpha(\mathbf{u})$ と表現する。

まず、$\mathbf{u}_1$ 軸周りに α 回転、続いて、$\mathbf{u}_2$ 軸周りに β 回転する。

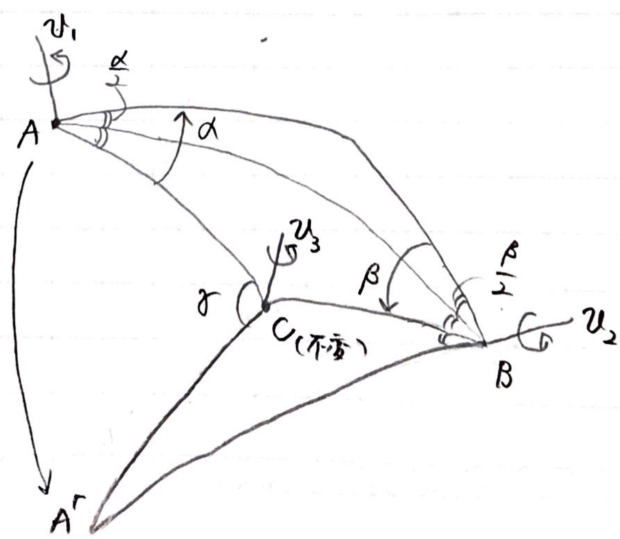
$R = R_\beta(\mathbf{u}_2)R_\alpha(\mathbf{u}_1)$ とすれば、

$$\tilde{R}R = \tilde{R}_\alpha \tilde{R}_\beta R_\beta R_\alpha = E_3$$
$$\det R = \det R_\beta \det R_\alpha = 1$$

R も回転

回転軸と回転角は $\mathbf{u}_3$ と γ

回転操作は群をつくる∴回転群



オイラー角による回転の表示

回転を回転軸 $\hat{v}$ と回転角 $|v|$ で $R(v)$ と表せば、回転角は回転により不変だから、$R(v)v = v$.
よって、任意の回転 Q に対して、

$$QR(v)Q^{-1}Qv = Qv \qquad \left(\begin{array}{l} QR\,v = Qv \\ \quad\; Q^{-1}Q \end{array}\right.$$

よって、$R' = QRQ^{-1}$ はベクトル Qv を動かさない。つまり R' の軸は Qv である。
また、QRQ^{-1} は基底変換ともみることができるので、R と R' の回転角は等しい。

$$R' = QRQ^{-1} \qquad Q:\ R\text{の回転軸} \to R'\text{の回転軸 に移す回転}$$

同じclass(類)に属する

オイラー角 α, β, γ による回転の表示

1. z 軸周りの角度 α の回転 $R_\alpha(z)$. 座標軸は $(x_1, y_1, z_1=z)$ へ.

2. 新しい y_1 軸周りの角度 β の回転 $R_\beta(y_1)$. $(x_2, y_2=y_1, z_2)$ へ.

$$R_\beta(y_1) = R_\alpha(z) R_\beta(y) [R_\alpha(z)]^{-1} \quad \cdots *1$$

3. さらに新しい z_2 軸周りの角度 γ の回転 $R_\gamma(z_2)$

$$R_\gamma(z_2) = R_\beta(y_1) R_\gamma(z_1) [R_\beta(y_1)]^{-1} \quad \cdots *2$$

$$\begin{aligned}
R(\alpha, \beta, \gamma) &= R_\gamma(z_2) R_\beta(y_1) R_\alpha(z) \\
&= R_\gamma(z_2) \cdot R_\beta(y_1) \cdot R_\alpha(z) \\
&= [R_\beta(y_1) R_\gamma(z_1) [R_\beta(y_1)]^{-1}] \cdot R_\beta(y_1) \cdot R_\alpha(z) \quad (\because *2) \\
&= R_\beta(y_1) R_\gamma(z_1) \cdot R_\alpha(z) \quad z_1 = z \\
&= R_\alpha(z) R_\beta(y) [R_\alpha(z)]^{-1} \cdot R_\gamma(z) R_\alpha(z) \quad (\because *1) \\
&= R_\alpha(z) R_\beta(y) R_\gamma(z)
\end{aligned}$$

← すべて元の軸まわりの回転

回転操作のユニタリ演算子

$\hat{n}$軸周りの角度θの回転$R_\theta(\hat{n})$に対応するユニタリ変換、角運動量演算子を用いて、

$$R_\theta(\hat{n}) = e^{-i\hat{n}\cdot J}$$

とかける。これから、オイラー角による一般の回転(に対応するユニタリ変換)を次のようにかく。

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-iJ_z\alpha} e^{-iJ_y\beta} e^{-iJ_z\gamma} \quad (\hbar = 1)$$

これらの回転操作は群を作り、それぞれが連続なパラメータn, θおよびα, β, γ等により決まる。このような群を連続群とよぶ。

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$$
$$= i\varepsilon_{ijk} J_k \quad (\hbar = 1)$$