量子力学3 ノート⑰

回転操作Rの作る群 (連続群としての回転群)

以前の議論に従えば、回転とは、

$$\mathbb{r} \longmapsto \mathbb{r}' = R\mathbb{r}$$

$$\begin{cases} R \in SO(3) \\ \tilde{R}R = E_3 \\ \det R = 1 \end{cases}$$

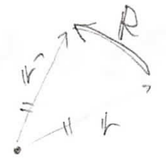
単位的に連続に変形できるものの集合

$$|\mathbb{r}'| = |\mathbb{r}|$$

$$|\mathbb{r}'| = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2} = \sqrt{\tilde{\mathbb{r}}'\mathbb{r}'} = \sqrt{\tilde{\mathbb{r}}\underbrace{\tilde{R}R}_{1}\mathbb{r}}, \qquad |\mathbb{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\tilde{\mathbb{r}}\mathbb{r}}$$

つまり長さを変えない変換

?



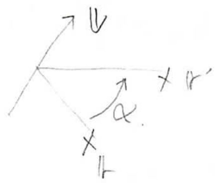
→回転軸の存在　回転行列は次の関係式をみたす.

$$\det(R-E_3) = \det(\tilde{R}-E_3) = \det(R^{-1}-E_3) = \det R^{-1}\det(E_3-R) = -\det(R-E_3) \qquad (-)^3=-1$$

よって $\det(R-E_3)=0$ であり、よって以下のような $\mathbb{u}$ が存在する.

$$R\mathbb{u} = \mathbb{u}$$

つまり、$\mathbb{u}$ 上の点は回転で不変，つまり $\mathbb{u}$ は回転軸となる．よって以後回転を回転軸 $\mathbb{u}$ と回転角 α で $R_\alpha(\mathbb{u})$ と表現しよう.



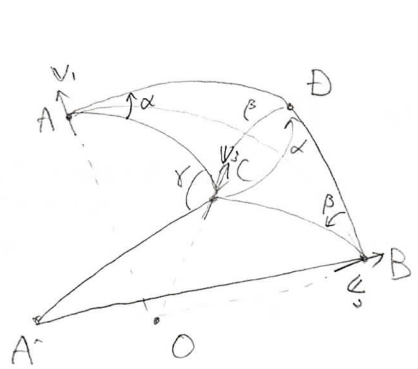
まず $\mathbb{u}_1$ 軸まわりに α 回転，続いて $\mathbb{u}_2$ 軸まわりに β 回転する。$R = R_\beta(\mathbb{u}_2)\cdot R_\alpha(\mathbb{u}_1)$ とすれば，

$$\tilde{R}R = \tilde{R}_\alpha\tilde{R}_\beta R_\beta R_\alpha = E_3,$$

$$\det R = \det R_\beta \cdot \det R_\alpha = 1$$

→ Rも回転操作。軸と角は $\mathbb{u}_3, \gamma$

→ 回転操作は群をつくる ⇒回転群.



Cは α,β で不変 → 軸上

オイラー角による回転の表示.

<準備> 回転を，軸 $\hat{v}$ と角度 $|v|$ で $R(v)$ と表せば，回転軸は回転で不変だから.

$$\underbrace{R(v)\cdot v = v}_{\text{不変}}$$

。よって任意の回転 Q に対して

$$QR(v)Q^{-1}\cdot Qv = Qv$$

より 回転 $R' = QRQ^{-1}$ はベクトル Qv を動かさない。→ 新しい回転 R' の軸は Qv。

また，QRQ^{-1} は基底変換とみることができるので，R と $R'(=QRQ^{-1})$ の回転角は等しい。また，Q は R の軸を R' の軸に移す回転とも言える，このような

$$R' = QRQ^{-1} \qquad Q: 軸を変える回転.$$

のような関係にある対称操作 R と R' は同じ class (類) に属すると呼ぶ。

オイラー角 α, β, γ による回転の表示

一般の回転 R を次のような回転の合成として考える.

1. z 軸まわりの角度 α の回転 $R_\alpha(z)$。座標軸は $(x_1, y_1, z_1 = z)$ へ，
2. 続いて，新しい y_1 軸まわりの角度 β の回転 $R_\beta(y_1)$。座標軸は $(x_2, y_2 = y_1, z_2)$ へ，

$$R_\beta(y_1) = R_\alpha(z)\, R_\beta(y)\, [R_\alpha(z)]^{-1} \quad -\ *1$$

3. さらに，新しい z_2 軸まわりの角度 γ の回転 $R_\gamma(z_2)$

$$R_\gamma(z_2) = R_\beta(y_1)\, R_\gamma(z)\, [R_\beta(y_1)]^{-1} \quad -\ *2$$

全ての回転

$$
\begin{aligned}
\to R(\alpha,\beta,\gamma) &= R_\gamma(z_2)\, R_\beta(y_1)\, R_\alpha(z) \\
&= R_\gamma(z_2)\cdot R_\beta(y_1)\cdot R_\alpha(z) \\
&\overset{*2}{=} R_\beta(y_1)\cdot R_\gamma(z)\cdot \underbrace{[R_\beta(y_1)]^{-1}\cdot R_\beta(y_1)}_{=1}\cdot R_\alpha(z) \\
&= R_\beta(y_1)\cdot R_\gamma(z)\cdot R_\alpha(z) \\
&\overset{*1}{=} R_\alpha(z)\cdot R_\beta(y)\cdot \underbrace{[R_\alpha(z)]^{-1}\cdot R_\gamma(z)\cdot R_\alpha(z)} \\
&= R_\alpha(z)\cdot R_\beta(y)\cdot R_\gamma(z)
\end{aligned}
$$

軸が全て z 軸で同じなので順序を変えて良い $R_\alpha(z)^{-1} R_\alpha(z) = 1$

結局，元の $x\,y\,z$ 軸で z 周りに γ，→ y 周りに β，→ z 周りに α

回転操作のユニタリ演算子.

前節までの話に従って,$\hat{n}$ 軸まわりの角度 θ の回転 $R_\theta(\hat{n})$ に対応するユニタリ変換,

角運動量演算子を用いて,

$$R_\theta(\hat{n}) = e^{-i\hat{n}\cdot J}$$

と書ける.これからオイラー角による一般の回転(に対応するユニタリ変換)

を下のように書く,

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-iJ_z\alpha},\, e^{-iJ_y\beta},\, e^{-iJ_z\gamma}$$

← $\hbar=1$

これら回転操作は群をつくり,それぞれが連続なパラメター n, θ および

α,β,γ 等により決まる.このような群を連続群と呼ぶ.

$$[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$$