

復習

角運動量の合成

$$\underline{J = J_1 + J_2}, \begin{cases} J_1^2 |j_1 m_1\rangle_1 = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 m_1\rangle_1 \\ J_{1z} |j_1 m_1\rangle_1 = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle_1 \\ J_2^2 |j_2 m_2\rangle_2 = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_2 m_2\rangle_2 \\ J_{2z} |j_2 m_2\rangle_2 = \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle_2 \end{cases}$$

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{1k}$$

$$[J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{2k}$$

$$[J_{1i}, J_{2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{2k}$$

$$\rightarrow J^2 |j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle$$

$$J_z |j m\rangle = \hbar m |j m\rangle$$

$$|j m\rangle \leftrightarrow |j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2 = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |m_1 m_2\rangle$$

$$|j m\rangle \leftrightarrow |m_1 m_2\rangle \text{ 積形結合}$$

$$|j m\rangle = \underbrace{|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle}_{\text{積形結合}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle$$

7L "三ツコ" "ルタ" = 1 係数

CG 係数

$$\begin{cases} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle \langle j m | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle = \delta_{m m_1 m_2} \delta_{m m_1' m_2'} \\ \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle \langle j m | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle = \delta_{j j_1 j_2} \delta_{m m_1 m_2} \end{cases}$$

① ② $\rightarrow j$?

$$j = j_{\max}, j_{\max}-1, \dots, j_{\min}$$

$$\begin{aligned} j_{\max} &= j_1 + j_2 \\ j_{\min} &= |j_1 - j_2| \end{aligned}$$

全状態数 $|j_1 m_1\rangle_1$: $m_1 = -j_1 \dots j_1 \quad 2j_1 + 1 \square$

$|j_2 m_2\rangle_2$: $m_2 = -j_2 \dots j_2 \quad 2j_2 + 1 \square$

$|j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2$: $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \square$

$|j m\rangle \quad \text{tot} = ? \quad \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} (2j+1) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$

具体例

① $f_1 = 1/2, f_2 = 1/2$

$\rightarrow f_{\max} = 1/2 + 1/2 = 1, f_{\min} = f_1 - f_2 = 1/2 - 1/2 = 0$

$f = \underline{1}, 0$

$1/2 \otimes 1/2 = 1 \oplus 0$

状態数 $(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)$
 $= 2 \times 2 = 4$

$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{array} \right\} //$

② $f_1 = 1, f_2 = 1/2$

$f_{\max} = 1 + 1/2 = 3/2$

$f_{\min} = 1 - 1/2 = 1/2$

$1 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2 \rightarrow 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$

$(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1/2 + 1) = 3 \times 2 = 6 //$

$2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$) $\rightarrow 6 //$

③ $f_1 = 1, f_2 = 1$

$f_{\max} = 1 + 1 = 2$

$f_{\min} = 1 - 1 = 0$

$f = 2, 1, 0$

$1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0$

$(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 1) = 3 \times 3 = 9 //$

$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{array} \right\} 9 //$

CG係数を決める!

既約テ=ソル演算子

$$\begin{aligned} J_+ |j, m\rangle &= \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle, \\ J_- |j, m\rangle &= \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle, \end{aligned}$$

まず, 球面調和関数 Y_{lm} , 任意の関数 f とし

$$\begin{aligned} L_z (Y_{lm} f) &= (L_z Y_{lm}) f + Y_{lm} L_z f \\ &= \hbar m Y_{lm} f + Y_{lm} L_z f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\pm} (Y_{lm} f) &= (L_{\pm} Y_{lm}) f + Y_{lm} L_{\pm} f \\ &= \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_{l, m \pm 1} f + Y_{lm} L_{\pm} f \end{aligned}$$

これを次のように書く

$$[L_z, Y_{lm}] = \hbar m Y_{lm}$$

$$[L_{\pm}, Y_{lm}] = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_{l, m \pm 1}$$

よ, 球面調和関数を一般化して 0 以上の整数 k に対して, $T_p^{(k)}, p = -k, -k+1, \dots, k-1, k$ という $2k+1$ 個の演算子と以下の関係式を満たすものを k 階の既約テ=ソル演算子と呼ぶ。

$$[J_z, T_p^{(k)}] = \hbar p T_p^{(k)}$$

$$[J_{\pm}, T_p^{(k)}] = \hbar \sqrt{(k \mp p)(k \pm p + 1)} T_{p \pm 1}^{(k)}$$

より一般に前章の議論によればベクトル演算子 $V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ とは軌道角運動量 L に対して

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad [L_i, \cdot] = 0$$

$$[L_i, V_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} V_k \quad \text{ベクトル演算子}$$

を満たすものであり, 座標 R , 運動量 P , 角運動量 J がこれを満たす。

$$\begin{cases} T_1^{(1)} = -1/\sqrt{2} (V_x + iV_y) = -1/\sqrt{2} V_+ \\ T_0^{(1)} = V_x \\ T_{-1}^{(1)} = 1/\sqrt{2} (V_x - iV_y) = 1/\sqrt{2} V_- \end{cases}$$

とすると, これが 1 階の既約テ=ソル演算子と好ま。

$J_i = L_i$ として繰り返していけると書ける, $k=1$ とすれば,

$$[L_z, T_p^{(1)}] = \hbar p T_p^{(1)}$$

$$[L_{\pm}, T_p^{(1)}] = \hbar \sqrt{(1 \mp p)(2 \pm p)} T_{p \pm 1}^{(1)}$$

$$[L_x, V_x] = i\hbar \epsilon_{xx\cdot} V_k = 0$$

$$[L_x, V_y] = i\hbar V_z$$

具体的に書けば,

$$[L_+, T_1^{(1)}] = 0, \quad [L_-, T_1^{(1)}] = \hbar \sqrt{2} T_0^{(1)}$$

$$[L_+, T_0^{(1)}] = \hbar \sqrt{2} T_1^{(1)}, \quad [L_-, T_0^{(1)}] = \hbar \sqrt{2} T_{-1}^{(1)}$$

$$[L_+, T_{-1}^{(1)}] = \hbar \sqrt{2} T_0^{(1)}, \quad [L_-, T_{-1}^{(1)}] = 0$$

(pdf 271 (1) p. 1 = 40)

既約テンソル演算子の積

ここで(2)次のように k_1 階の既約テンソル演算子の積を考えよう

$$T_g^{(k)} = T_{g_1}^{(k_1)} T_{g_2}^{(k_2)} \langle k_1 g_1, k_2 g_2 | k g \rangle$$

$T_g^{(k)}$ は $k = k_1 + k_2$ 階の既約テンソル演算子である。

これに、Clebsch-Gordan係数の対称性も使って以下を導く。

$$T_{g_1}^{(k_1)} T_{g_2}^{(k_2)} = T_g^{(k)} \langle k g | k_1 g_1, k_2 g_2 \rangle$$

$$= \langle k_1 g_1, k_2 g_2 | k g \rangle T_g^{(k)}$$

既約テンソル
→ 可約

∴ 既約テンソルの積は既約テンソルの和に分解できる。

例) 2つのベクトル演算子の積

2つのベクトル演算子 U, V からテンソル

$$(UV)_{ij} = U_{ik} V_{kj}$$

を構成できるが、一般にこれは既約テンソルに分解できる。

可約

0階の既約テンソル (スカラー)

$$T_0^{(0)} = -1/3 U \cdot V$$

1階の既約テンソル (ベクトル)

$$T_1^{(1)} = 1/\sqrt{2} (U \times V)_g$$

2階の既約テンソル

$$T_2^{(0)} = U_{-1} V_{-1}$$

$$T_1^{(2)} = 1/\sqrt{2} (U_0 V_1 + U_1 V_0)$$

$$T_0^{(2)} = 1/\sqrt{6} (U_{-1} V_1 + 2U_0 V_0 + U_1 V_{-1})$$

$$T_{-1}^{(2)} = 1/\sqrt{2} (U_0 V_{-1} + U_{-1} V_0)$$

$$T_{-2}^{(2)} = U_{-1} V_{-1}$$

既約テンソルとウィグナー-エッカートの定理