201810841 岡野至仁

$J=\frac{1}{2}$ と $J=\frac{1}{2}$ の合成

$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=1\oplus 0$

$j_1=\frac{1}{2}, j_2=\frac{1}{2}, \hbar=1$ として $m=m_1+m_2$ ごとの基底をとると、

$\Psi_1=(|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle)=(|\uparrow\uparrow\rangle)$

$\Psi_0=(|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle)=(|\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle)$

$\Psi_{-1}=(|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle)=(|\downarrow\downarrow\rangle)$

よって、$|j\,m\rangle$ について

$|1\,1\rangle=|\uparrow\uparrow\rangle=\Psi_1(1)$

$|1\,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle)=\Psi_0\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

$|1\,-1\rangle=|\downarrow\downarrow\rangle=\Psi_{-1}(1)$

$|0\,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)=\Psi_0\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

これをクレブシュゴルダン係数を用いて表すと

$|1\,1\rangle=|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|1\,1\rangle$

$|1\,0\rangle=|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}|1\,0\rangle+|-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle\langle-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|1\,0\rangle$

$|0\,0\rangle=|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}|1\,0\rangle-|-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle\langle-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}|1\,0\rangle$

$|1\,-1\rangle=|-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle\langle-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}|1\,-1\rangle$

まとめると、

j	m	m_1	m_2	$\langle j_1m_1j_2m_2\|jm\rangle$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$J=1$ と $J=\frac{1}{2}$ の合成

$1\otimes\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}$

同様に各 m ごとの基底をとると

$\Psi_{\frac{3}{2}}=(|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle)$

$\Psi_{\frac{1}{2}}=(|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle, |0\rangle|\frac{1}{2}\rangle)$

$\Psi_{-\frac{1}{2}}=(|-1\rangle|\frac{1}{2}\rangle, |0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle)$

$\Psi_{-\frac{3}{2}}=(|-1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle)$

よって、

$|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle=|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle=\Psi_{\frac{3}{2}}(1)$

$|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}J_-|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}(J_{1-}+J_{2-})|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle+|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle]$

$=\Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

$|\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{2}J_-|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$

$=\frac{1}{2}(J_{1-}+J_{2-})[\frac{\sqrt{3}}{3}|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle+\frac{\sqrt{6}}{3}|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle]$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{2}|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle+\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\sqrt{2}|-1\rangle|\frac{1}{2}\rangle$

$+0+\frac{\sqrt{6}}{6}|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}|-1\rangle|\frac{1}{2}\rangle+\frac{\sqrt{6}}{3}|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

$=\Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

$|\frac{3}{2}\,-\frac{3}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}J_-|\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}(J_{1-}+J_{2-})[\frac{\sqrt{3}}{3}|-1\rangle|\frac{1}{2}\rangle+\frac{\sqrt{6}}{3}|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}|-1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle+\frac{1}{3}|-1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

$=\Psi_{-\frac{3}{2}}(1)$

以上の手続きは、先に基底の変換を計算しておくと見通しよく行える

$J_-\Psi_{\frac{3}{2}}=(J_{1-}+J_{2-})(|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle)$

$=\sqrt{2}|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle+|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

$=\Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$

$J_-\Psi_{\frac{1}{2}}=(J_{1-}+J_{2-})(|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle, |0\rangle|\frac{1}{2}\rangle)$

$=(\sqrt{2}|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle, \sqrt{2}|-1\rangle|\frac{1}{2}\rangle+|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle)$

$=\Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$

$J_-\Psi_{-\frac{1}{2}}=(J_{1-}+J_{2-})(|-1\rangle|\frac{1}{2}\rangle, |0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle)$

$=(|-1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle, \sqrt{2}|-1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle)$

$=\Psi_{-\frac{3}{2}}(1\quad\sqrt{2})$

$\Psi_{-\frac{3}{2}}=(|-1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle)$

これを用いて、

$|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle=\Psi_{\frac{3}{2}}(1)$

$|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}J_-|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}J_-\Psi_{\frac{3}{2}}(1)=\Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

$$\left|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{2}J_-\left|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{2}J_-\Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

$$= \Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

$$\left|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}J_-\left|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}J_-\Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\Psi_{-\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

$$= \Psi_{-\frac{3}{2}}(1)$$

続いて $j=\frac{1}{2}$ のときを考える。$m=\frac{1}{2}$ の空間は $\Psi_{\frac{1}{2}}$ の基底によって1つ張られているので、$\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$ をその状態と直交するように定める

ここで次の2式が成立している

$$\left|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = \Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = \Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$\left|\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$ と $\left|\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$ が直交すると定義したので、

$$\left\langle \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\middle|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}\Psi_{\frac{1}{2}}^{\dagger}\Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}(a+\sqrt{2}b)$$

$$= 0$$

$a^2+b^2=1$, $a>0$ とすれば、

$$a=\frac{\sqrt{6}}{3}, \quad b=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、$j=\frac{1}{2}$ のとき存在する状態は

$$\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = \Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

$$\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle = J_-\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = J_-\Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

$$= \Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

$$= \Psi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

以上から、$J=1$ と $J=\frac{1}{2}$ を合成したときの状態は

j	m	m_1	m_2	$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 \| j m\rangle$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$
	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$
	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$
	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

なお、$j=\frac{1}{2}$ のときの状態は射影演算子を用いて導出できる

射影演算子

2次元の基底 $\Psi_{\frac{1}{2}}$ で張られる空間において規格化されている $|v\rangle$ と直交する状態 $|v_\perp\rangle$ は v 方向への射影 $P=|v\rangle\langle v|$ を用いて、任意の状態 $|t\rangle$ から次の式で構成できる

$$|v_\perp\rangle = P'|t\rangle,\quad P'=1-P,\quad P=|v\rangle\langle v|$$

$$P^2=P,\quad (P')^2=P'$$

今回の場合、$|v\rangle$ は

$$|v\rangle = \left|\tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = \Psi_{\frac{1}{2}}v,\quad v=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

直交性より

$$\langle v|v_\perp\rangle = \langle v|(1-P)|t\rangle = \langle v|t\rangle - \langle v|v\rangle\langle v|t\rangle = 0$$

ここで $|t\rangle$ を次のようにとる

$$|t\rangle = \Psi_{\frac{1}{2}}t,\quad t=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

このとき

$$\langle v|t\rangle = v^{\dagger}\Psi_{\frac{1}{2}}^{\dagger}\Psi_{\frac{1}{2}}t = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって、

$$|v_\perp\rangle = |v\rangle\langle v|v_\perp\rangle = |v\rangle\langle v|t\rangle - |v\rangle\langle v|v\rangle\langle v|t\rangle$$

$$= |t\rangle - |v\rangle\langle v|t\rangle = \Psi_{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}v\right) = \Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}$$

この $|v_\perp\rangle$ を規格化して

$$\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle = |v_\perp\rangle \frac{1}{\sqrt{\langle v_\perp | v_\perp\rangle}} = \frac{\sqrt{6}}{2}\Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix} = \Psi_{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

$J=1$ と $J=1$ の合成

$1\otimes 1 = 2\oplus 1\oplus 0$

各 m における基底は

$\Psi_2 = (|1\rangle|1\rangle)$

$\Psi_1 = (|1\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle)$

$\Psi_0 = (|1\rangle|-1\rangle, |0\rangle|0\rangle, |-1\rangle|1\rangle)$

$\Psi_{-1} = (|-1\rangle|0\rangle, |0\rangle|-1\rangle)$

$\Psi_{-2} = (|-1\rangle|-1\rangle)$

この基底の変換を考えると.

$$J_-\Psi_2 = (J_{1-}+J_{2-})(|1\rangle|1\rangle)$$
$$= \sqrt{2}\,(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle)$$
$$= \Psi_1\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$J_-\Psi_1 = (J_{1-}+J_{2-})(|1\rangle|0\rangle, |0\rangle|1\rangle)$$
$$= \sqrt{2}\,(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|-1\rangle, |-1\rangle|1\rangle + |0\rangle|0\rangle)$$
$$= \Psi_0\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

$$J_-\Psi_0 = (J_{1-}+J_{2-})(|1\rangle|-1\rangle, |0\rangle|0\rangle, |-1\rangle|1\rangle)$$
$$= \sqrt{2}\,(|0\rangle|-1\rangle, |-1\rangle|0\rangle + |0\rangle|-1\rangle, |-1\rangle|0\rangle)$$
$$= \Psi_{-1}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$J_-\Psi_{-1} = (J_{1-}+J_{2-})(|-1\rangle|0\rangle, |0\rangle|-1\rangle)$$
$$= \sqrt{2}\,(|-1\rangle|-1\rangle, |-1\rangle|-1\rangle)$$
$$= \Psi_{-2}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$\Psi_{-2} = (|-1\rangle|-1\rangle)$

よって

$|2\,2\rangle = \Psi_2(1)$

$$|2\,1\rangle = \frac{1}{2}J_-|2\,2\rangle = \frac{1}{2}J_-\Psi_2(1) = \Psi_1\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$|2\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}J_-|2\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}J_-\Psi_1\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \Psi_0\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$$

$$|2\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}J_-|2\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}J_-\Psi_0\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6}\\ \frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix} = \Psi_{-1}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$|2\,-2\rangle = \frac{1}{2}J_-|2\,-1\rangle = \frac{1}{2}J_-\Psi_{-1}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \Psi_{-2}(1)$$

続いて $j=1$ のときを考える

$$|v\rangle = |2\,1\rangle = \Psi_1 v,\quad v = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

と直交する $|v_\perp\rangle$ を求めれば良い

ここで

$$|v_\perp\rangle = P'|t\rangle,\quad P' = 1-P = 1-|v\rangle\langle v|$$

$$\therefore \langle v|v_\perp\rangle = \langle v|(1-P)|t\rangle = \langle v|t\rangle - \langle v|v\rangle\langle v|t\rangle = 0$$

$|t\rangle = \Psi_1 t,\ t = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ とすれば

$$|v_\perp\rangle = |v\rangle\langle v|v_\perp\rangle = |v\rangle\langle v|t\rangle - |v\rangle\langle v|v\rangle\langle v|t\rangle$$
$$= |t\rangle - |v\rangle\langle v|t\rangle = \Psi_1(t - vv^\dagger t)$$
$$= \Psi_1\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$$
$$= \Psi_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

規格化して

$$|1\,1\rangle = |v_\perp\rangle\frac{1}{\sqrt{\langle v_\perp|v_\perp\rangle}} = \sqrt{2}\,\Psi_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \Psi_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

また,

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}J_-|1\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}J_-\Psi_1\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \Psi_0\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

$$|1\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}J_-|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}J_-\Psi_0\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix} = \Psi_{-1}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

残りは $|0\,0\rangle$ を考えれば良い。これは $u=|2\,0\rangle$ と $v=|1\,0\rangle$ に垂直である

この求める状態を $|u_\perp v_\perp\rangle$ とすると,直交性より

$$\langle u|u_\perp v_\perp\rangle = \langle u|(1-P_u)|t\rangle = 0$$
$$\langle v|u_\perp v_\perp\rangle = \langle v|(1-P_v)|t\rangle = 0$$

ここで $|t\rangle = \Psi_0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ とすると.

$$\langle u|t\rangle = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}\Psi_0^\dagger\Psi_0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\langle v|t\rangle = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\ \ 0\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\Psi_0^\dagger \Psi_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって,

$$P_u|t\rangle = |u\rangle\langle u|t\rangle = \Psi_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$P_v|t\rangle = |v\rangle\langle v|t\rangle = \Psi_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ゆえに,

$$|u_\perp v_\perp\rangle = |t\rangle - P_u|t\rangle - P_v|t\rangle = \Psi_0 \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2} \\ 0-\frac{1}{3}+0 \\ 0-\frac{1}{6}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \Psi_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

規格化して

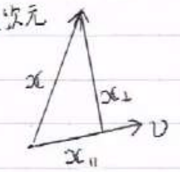
$$|0\ 0\rangle = |u_\perp v_\perp\rangle \frac{1}{\sqrt{\langle u_\perp v_\perp\rangle}} = \Psi_0 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

以上の結果をまとめて

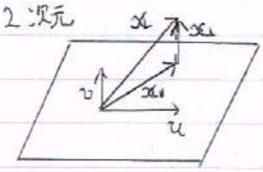
j	m	m_1	m_2	$\langle j_1 m_1\, j_2 m_2 \mid j m\rangle$
2	2	1	1	1
	1	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	1	0	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	0	1	-1	$\frac{\sqrt{6}}{6}$
	0	0	0	$\frac{\sqrt{6}}{3}$
	0	-1	1	$\frac{\sqrt{6}}{6}$
	-1	-1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	-1	0	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	-2	-1	-1	1
1	1	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	1	0	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
	0	1	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
	0	0	0	0
	0	-1	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
	-1	-1	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
	-1	0	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
0	0	1	-1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	0	0	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	0	-1	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

射影演算子による直交分解

1次元



2次元



$P = P^2$, $P^\dagger = P$ を満たす P をプロジェクションと呼ぶ

$P_\perp = 1 - P$ とすると

$$P_\perp^2 = (1-P)^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - 2P + P = 1 - P = P_\perp$$

$$P_\perp^\dagger = (1-P)^\dagger = 1 - P^\dagger = 1 - P = P_\perp$$

よって, $P_\perp$ もプロジェクションである

$|x\rangle$ は $|x_\parallel\rangle$ と $|x_\perp\rangle$ を用いて

$$|x\rangle = |x_\parallel\rangle + |x_\perp\rangle$$

と表せ, $|x_\parallel\rangle = P|x\rangle$, $|x_\perp\rangle = P_\perp|x\rangle$ とすると

$$\langle x_\perp|x_\parallel\rangle = \langle x|P_\perp P|x\rangle$$

ここで

$$P_\perp P = (1-P)P = P - P^2 = P - P = 0$$

であるから, $|x\rangle = |x_\parallel\rangle + |x_\perp\rangle$ は直交分解である

P の構成法

① $|e_1\rangle$, $\langle e_1|e_1\rangle = 1 \rightarrow P = |e_1\rangle\langle e_1|$ はプロジェクション

② $|e_i\rangle$, $i = 1, 2, \cdots, M \rightarrow P = |e_i\rangle\langle e_i|$ はプロジェクション

また, $|e_i\rangle \perp |e_j\rangle$ であるから, $\langle e_i|e_j\rangle = 0$ より

$$P_i P_j = |e_i\rangle\langle e_i|e_j\rangle\langle e_j| = 0$$

よって, $P \sum P_i$ もプロジェクションである

N次元で議論する

$P_\perp$ は $N-M$ 次元へのプロジェクションである

$M = N-1$ のとき $P = \sum P_i$ として $(1-P)|x\rangle$ は1次元

2次元で,ある1つの1次元状態に直交すれば

$(2-1) = 1$ つの状態が定まり,

3次元で,ある2つの1次元状態に直交すれば

$(3-2) = 1$ つの状態が定まる

以下同様