

第13回

角運動量の合成

J_1 と J_2 という独立無関係の 2 つの角運動量の合成.

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{1k}, \quad a=1,2$$

$$[J_{1i}, J_{2j}] = 0 : \text{可換} \circ J_1 \text{ と } J_2 \text{ は 無関係}$$

" $J = J_1 + J_2$ " と 角運動量の合成を定義

$$\hookrightarrow [J_i, J_j] = [J_{1i} + J_{2i}, J_{1j} + J_{2j}]$$

$$= [J_{1i}, J_{1j}] + [J_{2i}, J_{2j}]$$

$$= i\hbar \epsilon_{ijk} J_{1k} + i\hbar \epsilon_{ijk} J_{2k}$$

$$= i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

$\rightarrow J$ は 角運動量の定義を満足 $\Rightarrow J$ は 角運動量

$\Leftrightarrow "J_x + J_y"$ の 成分!!

角運動量の合成とテンソル積

角運動量の合成の正しい意味

角運動量 1 (固有演算子 A_1, B_1), 角運動量 2 (固有演算子 A_2, B_2) に対して、
テンソル積 \otimes とテンソル積で定義された演算子の積を次のように定義する。

$$(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) = A_1 B_1 \otimes A_2 B_2$$

$$\left(\begin{aligned} &\rightarrow (A_1 \otimes A_2)(|j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2) \\ &= (A_1 |j_1 m_1\rangle_1) \otimes (A_2 |j_2 m_2\rangle_2) \end{aligned} \right)$$

合成角運動量 J は次のように書ける。

$$J = J_1 + J_2 = J_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes J_2$$

J_1 は "2" の空間の単位演算子を用いてテンソル積で
"大土の世界" の演算子として拡張

$[J_{1i}, J_{2j}] = 0$ は次のように書ける。

$$[J_{1i} \otimes 1_2, 1_1 \otimes J_{2j}]$$

202117
同じ世界に作用する演算子である。

$$= (J_{1i} \otimes 1_2)(1_1 \otimes J_{2j}) - (1_1 \otimes J_{2j})(J_{1i} \otimes 1_2)$$

$$= J_{1i} 1_1 \otimes 1_2 J_{2j} - 1_1 J_{1i} \otimes J_{2j} 1_2$$

$$= J_{1i} \otimes J_{2j} - J_{1i} \otimes J_{2j}$$

$$= 0$$

✓

同様に $[1_1 \otimes J_{2i}, J_{1j} \otimes 1_2] = 0$

を得。

$$[J_{1i} \otimes 1_2, J_{1j} \otimes 1_2] = J_{1i} J_{1j} \otimes 1_2 - J_{1j} J_{1i} \otimes 1_2$$

$$= [J_{1i}, J_{1j}] \otimes 1_2 = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{1k} \otimes 1_2$$

$$[1_1 \otimes J_{2i}, 1_1 \otimes J_{2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} 1_1 \otimes J_{2k}$$

より、 J は角運動量の交換関係を満たすことがわかる。

角運動量の固有状態

$$\begin{cases} J_1^2 |j_1, m_1\rangle_1 = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1, m_1\rangle_1 \\ J_{1z} |j_1, m_1\rangle_1 = \hbar m_1 |j_1, m_1\rangle_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_2^2 |j_2, m_2\rangle_2 = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_2, m_2\rangle_2 \\ J_{2z} |j_2, m_2\rangle_2 = \hbar m_2 |j_2, m_2\rangle_2 \end{cases}$$

⇒ $J = J_1 + J_2$ の作用する状態は、次のように定数である。

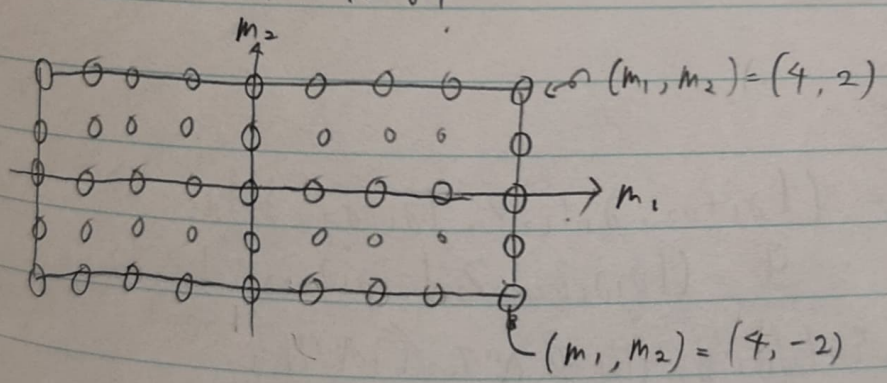
$$|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle_1 |j_2, m_2\rangle_2 \equiv |j_1, m_1\rangle_1 \otimes |j_2, m_2\rangle_2 \quad \text{新しい状態}$$

この状態に、演算子 $A_1 \otimes A_2$ が次のように作用する

$$(A_1 \otimes A_2) |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = A_1 |j_1, m_1\rangle_1 \otimes A_2 |j_2, m_2\rangle_2$$

…この作用する状態は何個あるか？

例) $j_1, m_1: -j_1 \leq m_1 \leq j_1$



$$\Rightarrow -4 \leq m_1 \leq 4 \dots j_1 = 4, \quad -2 \leq m_2 \leq 2 \dots j_2 = 2$$

個数は $(2 \times 2 + 1) \times (4 \times 2 + 1) = 5 \times 9 = 45$ 個!

一般化して

$$N_{j_1, j_2} = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \text{ 個}$$

○ 7L7"22 ゴルダン係数の性質

一般論に依ると $J = J_1 + J_2$ は

$$J^2 |jm\rangle = j(j+1) |jm\rangle$$

$$J_z |jm\rangle = m |jm\rangle$$

とある。 $|jm\rangle$ が存在する。 したがって $|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$ の固有線形直交系。
重複添字の和をとり j_1, j_2 の記法を用いて

$$|jm\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle C_{m_1 m_2, jm}$$

と書く。 左の $\langle j_1 m_1, j_2 m_2 |$ をかけると $|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$ が規格直交系に仮定される

$$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | jm\rangle = C_{m_1 m_2, jm}$$

∴ この係数を "7L7"22 ゴルダン係数" とおく

よってわかる。 規格直交化して $|jm\rangle$ の個数は $|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle$ と同じで N_{j_1, j_2} 個となる。 $|jm\rangle$ は N_{j_1, j_2} 個独立に作る、ということに注意せよ。
この行列形式は

$$\Phi = \Psi C$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi |_{jm} = \langle jm\rangle \quad \dots \quad \Phi &= (|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle, |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle, \dots) \\ (\Psi)_{m_1 m_2} = |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \quad \dots \quad \Psi &= (|j_1, j_1, j_2, j_2\rangle, |j_1, j_1, j_2, j_2 - 1\rangle, |j_1, j_1, j_2, j_2 - 2\rangle, \dots) \end{aligned}$$

とある。 Φ, Ψ は固有状態を N_{j_1, j_2} 個並べて行なう。

C は $N_{j_1, j_2} \times N_{j_1, j_2}$ の正交行列とある。

・ 7L7"22 ゴルダン係数の直交性

$$\begin{aligned} |j_1 m_1, j_2 m_2\rangle \text{ の直交性} &: \Psi^\dagger \Psi = E_{N_{j_1, j_2}} \quad (\Leftrightarrow \langle j_1, j_1, j_2, j_2 | \dots | j_1, j_1, j_2, j_2 \rangle = 1) \\ |jm\rangle \text{ の直交性} &: \Phi^\dagger \Phi = E_{N_{j_1, j_2}} \end{aligned}$$

$$\text{例 27. } E_{N_{j_1, j_2}} = \Phi^\dagger \Phi = C^\dagger \Psi^\dagger \Psi C = C^\dagger C$$

→ C は 2-タリ

$$\text{よ} \cdot (C^\dagger)_{j m, m_1 m_2} \equiv \langle j m | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle^*$$

例

$$\begin{aligned} C^\dagger C &= \langle j m | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j' m' \rangle = E_{N_{j_1, j_2}} \\ &= \delta_{j j'} \delta_{m m'} \end{aligned}$$

$$\text{よ} \cdot C^\dagger = C^{-1} \text{ ため } C C^\dagger = E_{N_{j_1, j_2}} \text{ かつ}$$

$$C C^\dagger = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \langle j m | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

例

→ 2種類の直交関係

以下 $|j m\rangle$ (角運動量の和 $J = J_1 + J_2$ の固有状態) を具体的に構成するとき

$$J_z |j m\rangle = \hbar m |j m\rangle$$

$$(J_{1z} + J_{2z}) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar (m_1 + m_2) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$= \hbar (m_1 + m_2) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar m |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$\text{よ} \cdot \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 m_1' j_2 m_2' \rangle \langle j_1 m_1' j_2 m_2' | j m \rangle$$

$$= \hbar (m_1 + m_2) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = 0$$

$$= \hbar (m_1 + m_2) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = 0$$

① $(m_1 + m_2 - m) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = 0$

$\rightarrow \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = 0, \text{ if } m \neq m_1 + m_2$ //

(\rightarrow 言い換えると $m = m_1 + m_2$ のとき $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle \neq 0$.)

○ 2粒子全角運動量

• $j_1 \geq j_2$ として $m_1 + m_2 = j_1 + j_2$

のとき考慮。この状態は $|j_1 j_1 j_2 j_2\rangle \dots (m_1, m_2) = (j_1, j_2)$

\rightarrow この $J_+ = J_{1+} + J_{2+}$ を増やして新しい状態は構成できる。

$|j_1 j_1 j_2 j_2\rangle = |j_{\max} j_{\max}\rangle, j_{\max} = j_1 + j_2$

であり、これに逆方向に J_- を作用させて $|j_{\max} m\rangle, m = j_{\max}, \dots, j_{\max} - 2j_{\max} + 1$ 個の状態が構成できる。

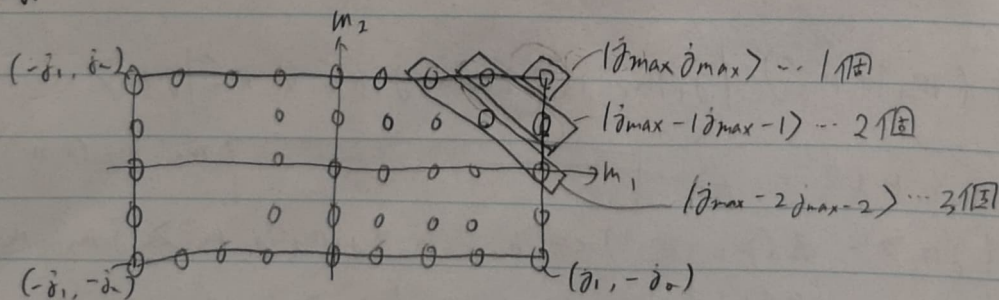
• $m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 1 = j_{\max} - 1$

のとき 2の状態は $(m_1, m_2) = (j_1 - 1, j_2), (j_1, j_2 - 1)$

の中で 1つは $j = j_{\max} = j_1 + j_2$ の状態として使われるので、残り直交する状態が 1つあり、 $j = j_{\max} - 1$

$|j_{\max} - 1 j_{\max} - 1\rangle$

とすると



$m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 2$

の状態は $(m_1, m_2) = (j_1 - 2, j_2), (j_1 - 1, j_2 - 1), (j_1, j_2 - 2)$

が構成する

∴ $j_2 - 2 \geq -j_2$ が必要

↳ この「2個で打ち止めに付す条件」

: 新しい状態の存在条件

∴ J を cy 作用 \pm した $2j$ の新しい状態の構成

$\rightarrow 2(j_{max} - 2) + 1$ (個)

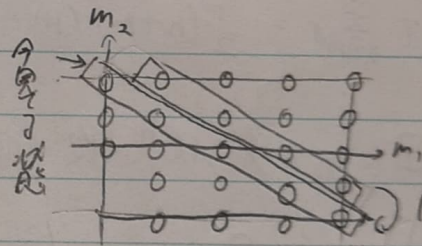
$m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - N$

の状態では、新しい $j = j_1 + j_2 - N$ での状態が現れたら

$j_2 - N \geq -j_2$

が必要。この

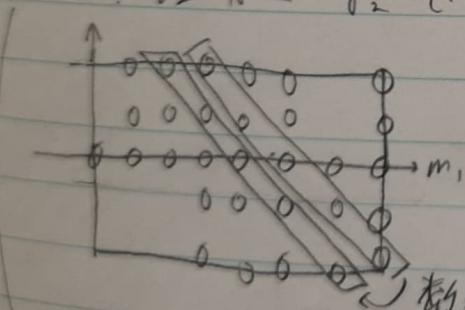
$j = j_1 + j_2 - N \geq j_1 - j_2$



$(m_1, m_2) = (j_1 - N, j_2), \dots, (j_1, j_2 - N)$

この j の新しい状態の存在条件

* 且 $j_2 - N \geq -j_2$ が必要



個増えた = 新しい状態の存在条件

1) 可能な j の値は

$j = j_1 + j_2, \dots, j_1 - j_2 = |j_1 - j_2|$

一般に $j = j_1 + j_2, \dots, |j_1 - j_2|$

$j = 1, 2, \dots, j_1 + j_2$
 $j = 1, 2, \dots, |j_1 - j_2|$
 $j = \frac{1}{2}(j_1 + j_2)(j_1 - j_2 + 1) + (j_1 - j_2 + 1)$

状態数 $j_< = |j_1 - j_2|$, $j_> = j_1 + j_2$

$$\sum_{j=j_<}^{j_>} (2j+1) = 2 \cdot \frac{1}{2} (j_< + j_>) (j_> - j_< + 1) + (j_> - j_< + 1)$$

$$= (j_> + j_< + 1) (j_> - j_< + 1)$$

$$= (2j_1 + 1) (2j_2 + 1)$$

① $\sum_{j=j_<}^{j_>} j$ は? 一般に最小値 n , 最大値 m の $\sum_{j=n}^m j$ を考える.

$$2 \times \sum_{j=n}^m j = \underbrace{(n+n+1+\dots+m)}_{n+n+1+\dots+m} + \underbrace{(m+m-1+\dots+n)}_{m+m-1+\dots+n}$$

$$\rightarrow \frac{(n+m) + (n+m) + \dots + (n+m)}{(n+m) + (n+m) + \dots + (n+m)} = (n+m) \times (m-n+1)$$

$$\therefore \sum_{j=n}^m j = \frac{1}{2} (n+m) (m-n+1)$$

この図に示す全状態数 (格子点の数) は整数的.

これは $j_1 \otimes j_2 = |j_1 - j_2| \oplus |j_1 - j_2| + 1 \oplus \dots \oplus j_1 + j_2$

表す!

○ 状態数の数の上へ (具体例)

公式 $j_1 \otimes j_2 = j_1 + j_2 \oplus j_1 + j_2 - 1 \oplus \dots \oplus |j_1 - j_2|$

例1 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 1 \oplus 0$

状態数 $(2j_1+1)(2j_2+1)$ より

(右) $= (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = 2 \cdot 2 = 4$

(左) $= (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 0 + 1) = 3 + 1 = 4$ #

例12 $1 \otimes \frac{1}{2} = (1 + \frac{1}{2}) \oplus (1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$

状态数

(左) = $(2 \cdot 1 + 1) \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = 3 \times 2 = 6$

(右) = $(2 \cdot \frac{3}{2} + 1) + (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = 4 + 2 = 6$

例13 $1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0$

状态数

(左) = $(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 1) = 3 \times 3 = 9$

(右) = $(2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 0 + 1) = 5 + 3 + 1 = 9$

例14 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (1 \oplus 0) \otimes \frac{1}{2} = 1 \otimes \frac{1}{2} + 0 \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$

状态数

(左) = $2 \times 2 \times 2 = 8$

(右) = $(2 \cdot \frac{3}{2} + 1) + 2 \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = 4 + 2 \cdot 2 = 8$

例15 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (\frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}) \otimes \frac{1}{2}$

= $\frac{3}{2} \otimes \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$

= $2 \oplus 1 \oplus (1 \oplus 0) \oplus (1 \oplus 0)$

= $2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 + 0 \oplus 0$

状态数

(左) = $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

(右) = $(2 \cdot 2 + 1) + 3 \cdot (2 \cdot 1 + 1) + 2 \cdot (2 \cdot 0 + 1)$

= $5 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 16$