

## 角運動量の合成

$\vec{J}_1, \vec{J}_2$  という2つの角運動量(無関係)の合成

$$[J_{\alpha i}, J_{\beta j}] = i\hbar e_{ijk} J_{\gamma k} \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$[J_{1i}, J_{2j}] = 0$$

## 角運動量の和

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_{1i} + J_{2i}, J_{1j} + J_{2j}] = [J_{1i}, J_{1j}] + [J_{2i}, J_{2j}] \\ &= i\hbar e_{ijk} J_{1k} + i\hbar e_{ijk} J_{2k} \\ &= i\hbar e_{ijk} (J_{1k} + J_{2k}) = i\hbar e_{ijk} J_{ik} \end{aligned}$$

## 角運動量の合成のより正確な意味

より正確には角運動量1に関する演算子  $A_1, B_1$ , 角運動量2に関する演算子  $A_2, B_2$  に対してテンソル積  $\otimes$  を用いる。

$$A_1 \otimes A_2 \quad |j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2$$

↑                           ↑

$$(A_1 |j_1 m_1\rangle_1) \otimes (A_2 |j_2 m_2\rangle_2)$$

$$(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) = A_1 B_1 \otimes A_2 B_2$$

合成角運動量  $\vec{J}$  は

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{J}_1 \otimes 1_2 + 1_1 \otimes \vec{J}_2$$

たとえば  $[J_{1i}, J_{2j}] = 0$  は次のようた計算による。

$$[J_{1i} \otimes 1_2, 1_1 \otimes J_{2j}] = J_{1i} 1_1 \otimes 1_2 J_{2j} - 1_1 J_{1i} \otimes J_{2j} 1_2 = 0$$

↑                           ↑                           ↑                           ↑

$J_{1i}$                     $J_{2j}$                     $J_{1i}$                     $J_{2j}$

同様に  $[1_1 \otimes J_{2i}, J_{1j} \otimes 1_2] = 0$  である。また、

$$\begin{aligned} [J_{1i} \otimes 1_2, J_{1j} \otimes 1_2] &= J_{1i} J_{1j} \otimes 1_2 - J_{1j} J_{1i} \otimes 1_2 = [J_{1i}, J_{1j}] \otimes 1_2 \\ &= i\hbar e_{ijk} J_{1k} \otimes 1_2 \end{aligned}$$

$$[1_1 \otimes J_{2i}, 1_1 \otimes J_{2j}] = i\hbar e_{ijk} 1_1 \otimes J_{2k}$$

から、 $\vec{J}$  も角運動量の交換関係を満たすことが分かる。

## 角運動量の固有状態

$$\vec{J}_1^2 |j_1 m_1\rangle_1 = \hbar^2 j_1(j_1+1) |j_1 m_1\rangle_1$$

$$\vec{J}_2^2 |j_2 m_2\rangle_2 = \hbar^2 j_2(j_2+1) |j_2 m_2\rangle_2$$

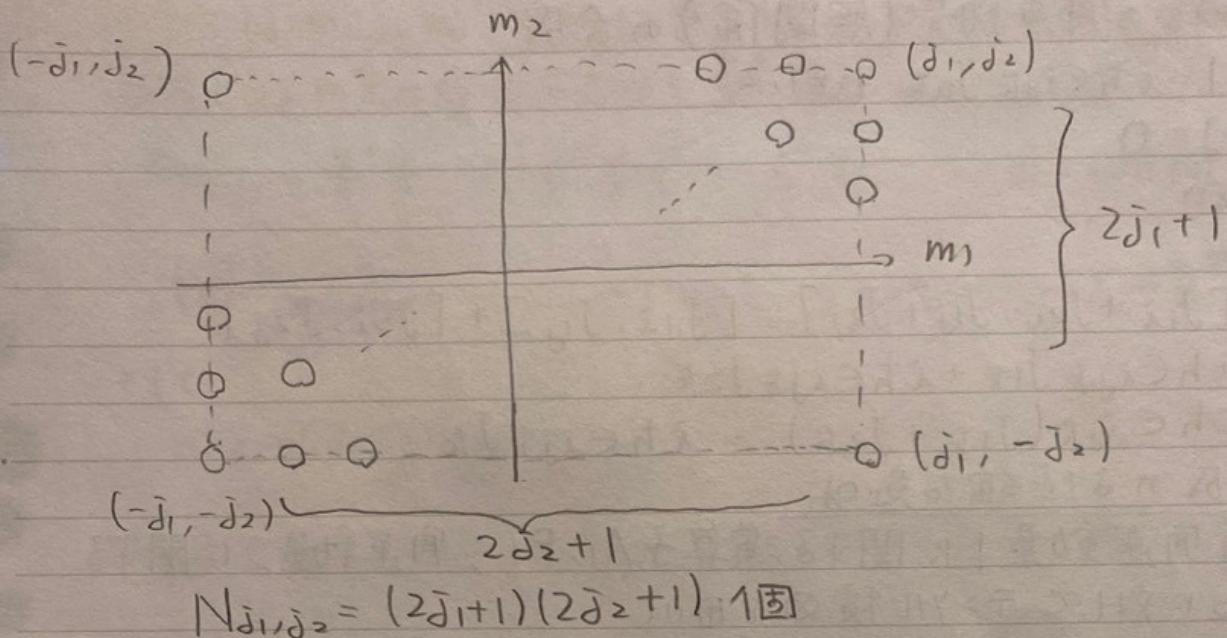
$$J_{1z} |j_1 m_1\rangle_1 = \hbar m_1 |j_1 m_1\rangle_1$$

$$J_{2z} |j_2 m_2\rangle_2 = \hbar m_2 |j_2 m_2\rangle_2$$

これから  $\vec{J}$  が作用する状態を次のようにつくる。

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle_1 |j_2 m_2\rangle_2 = |j_1 m_1\rangle_1 \otimes |j_2 m_2\rangle_2 \text{ 新しい状態}$$

$$(A_1 \otimes A_2) |j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = A_1 |j_1 m_1 \rangle \otimes A_2 |j_2 m_2 \rangle$$



一方、一般論に従えば

$$\hat{j}^2 |j m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j m\rangle \quad |j m\rangle = \text{規格直交系}$$

$$J_z |j m\rangle = m\hbar |j m\rangle$$

となる  $|j m\rangle$  が存在する。二の間の線形関係を

$$|j m\rangle = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \underbrace{C_{m_1 m_2 j m}}_{\text{和と } \sum_{M_1 M_2}} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \quad |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \text{規格直交系}$$

左から  $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$  をかけて、

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = C_{m_1 m_2 j m}$$

この係数  $C_{m_1 m_2 j m}$  が "クレブ" シュ・ゴルダ"ン" 係数である。

後述の手法で規格直交化された  $|j m\rangle$  が  $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$  と同じ  $N_{j_1, j_2}$  個独立に作れることを認めれば、これは行列形式で、

$$\Psi = \Phi \varphi$$

と書ける。 $\Psi$  は  $\varphi$  の記法を用いた

$$(\Psi)_{jm} = |jm\rangle, (\varphi)_{m_1 m_2} = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle, \varphi_{m_1 m_2 j m} = \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle$$

$\Psi, \varphi$  は 固有状態を  $N_{j_1, j_2}$  個ならべた 行ベクトルである。  $\varphi$  は  $N_{j_1, j_2} \times N_{j_1, j_2}$  の正方形行列。

$$\Psi = (|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle, |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle, \dots) : \text{状態をならべた行ベクトル}$$

$$\varphi = (|j_1 m_1, j_2 m_2\rangle, |j_1 m_1, j_2 m_2 - 1\rangle, |j_1 m_1, j_2 m_2 - 2\rangle, \dots)$$

$$\varphi = N_{j_1, j_2} \times N_{j_1, j_2} = \text{正方形行列}$$

$$\text{Clebsch-Gordan 系数の直交性} \quad \left( \begin{array}{c} \langle j_1, j_2 | j_1, j_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle j_1, j_2 | j_1, j_2 \rangle \end{array} \right) \left( | j_1, j_2 \rangle \otimes | j_2 \rangle \dots \right) = \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right)$$

ここで  $| j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle$  の規格直交性は  $\psi^\dagger \psi = E_{N_{j_1, j_2}}$  と表せ,  
同様に  $| j, m \rangle$  の規格直交性も  $\Psi^\dagger \Psi = E_{N_j}$  と書けるから,

$$E_{N_{j_1, j_2}} = \Psi^\dagger \Psi = C^\dagger \psi^\dagger \psi C = C^\dagger C \quad \therefore C: \text{unitary}$$

$$\therefore (C^\dagger)_{\bar{j}, m, m_1, m_2} = \langle \bar{j}, m | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle = \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | \bar{j}, m \rangle^*$$

ここで,

$$\underbrace{\langle \bar{j}, m | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle}_{\text{和}} \underbrace{\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | \bar{j}', m' \rangle}_{\text{和}} = \delta_{\bar{j}, \bar{j}'} \delta_{m, m'}$$

また,  $C^\dagger = C^{-1}$  から,  $CC^\dagger = E_{N_{j_1, j_2}}$  となり, これを成分で“書けば”,

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle \langle \bar{j}, m_1' | j_1, m_1' \bar{j}_2, m_2' \rangle = \delta_{m_1, m_1'} \delta_{m_2, m_2'}$$

となる。(2種類の直交関係)

以下,  $| j, m \rangle$  を具体的に構成することとする。まず,

$$\begin{aligned} J_z | j, m \rangle &= \hbar m | j, m \rangle \\ &= (J_{1z} + J_{2z}) | j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle \\ &= \hbar (m_1' + m_2') | j_1, m_1', j_2, m_2' \rangle \langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j, m \rangle \end{aligned}$$

左边から  $| j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle$  をかき消すと

$$\begin{aligned} \hbar m \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle &= \hbar (m_1' + m_2') \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, m_1', j_2, m_2' \rangle \\ &\quad \times \langle j_1, m_1', j_2, m_2' | j, m \rangle \\ &= \hbar (m_1 + m_2) \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle \end{aligned}$$

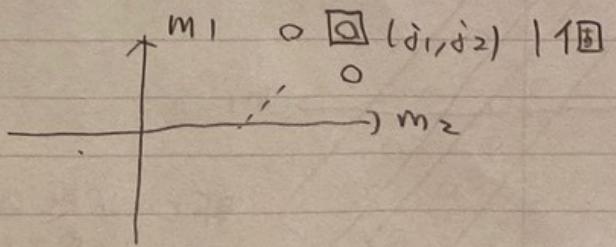
$$\therefore (m_1 + m_2 - m) \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle = 0$$

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle = 0 \quad \text{if } m \neq m_1 + m_2.$$

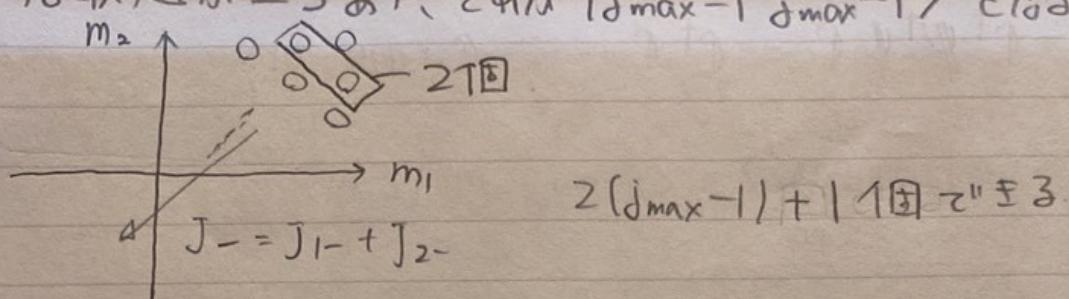
\*  $m = m_1 + m_2$  のときのみ  $\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m \rangle \neq 0$

$j_1 \geq j_2$  として  $m_1 + m_2 = j_1 + j_2$

この状態  $| j_1, m_1, j_2, m_2 \rangle$  から  $J_+$  を作用させて新しい状態をつくれないのか? これは  $| j_{\max}, j_{\max} \rangle$ ,  $j_{\max} = j_1 + j_2$  であり, これに繰り返し  $J_-$  を作用させることで  $| j_{\max}, m \rangle$ ,  $m = -j_{\max}, \dots, j_{\max}$  の  $2j_{\max} + 1$  個の状態が構成できる。

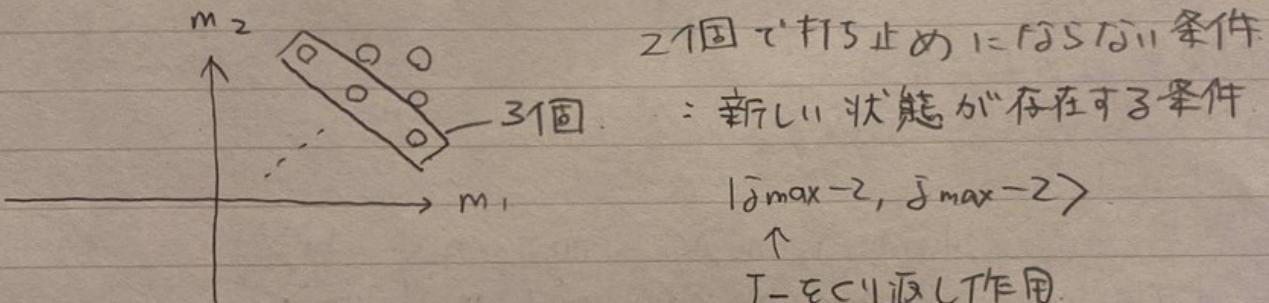


続いて  $m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 1 = j_{\max} - 1$   
 の状態は、 $(m_1, m_2) = (j_1 - 1, j_2), (j_1, j_2 - 1)$   
 の中で 1つは  $j = j_{\max} = j_1 + j_2$  の状態として使われているので、それと  
 直交する状態が一つあり、それが  $|j_{\max} - 1, j_{\max} - 1\rangle$  となる



続いて  $m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 2$

の状態は、 $(m_1, m_2) = (j_1 - 2, j_2), (j_1 - 1, j_2 - 1), (j_1, j_2 - 2)$   
 から構成されるが、その中のには  $j_2 - 2 \geq -j_2$  が必要



$2(j_{\max} - 2) + 1$  個である

続いて  $m_1 + m_2 = j_1 + j_2 - 3$

の状態で新しい  $j = j_1 + j_2 - 3$  である状態が現れるためには、

$$j_2 - 3 \geq -j_2$$

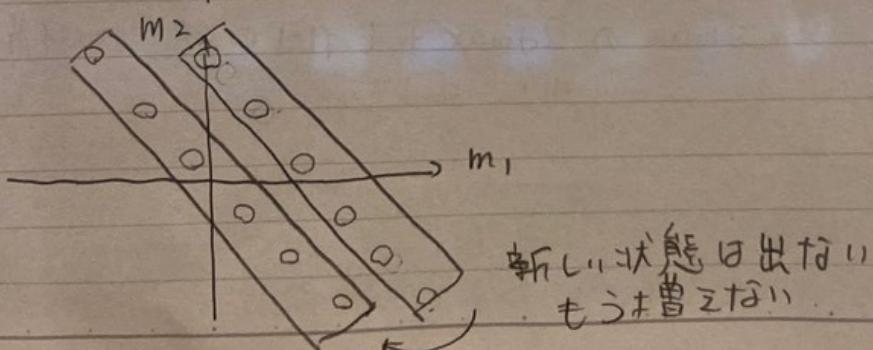
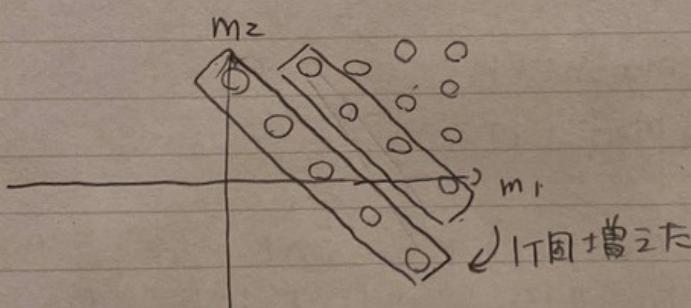
が必要である。さて、 $j = j_1 + j_2 - 3 \geq j_1 - j_2$

つまり可能な  $j$  の値としては

$$j = j_1 + j_2, \dots, j_1 - j_2$$

一般には

$$j = j_1 + j_2, \dots, |j_1 - j_2|$$



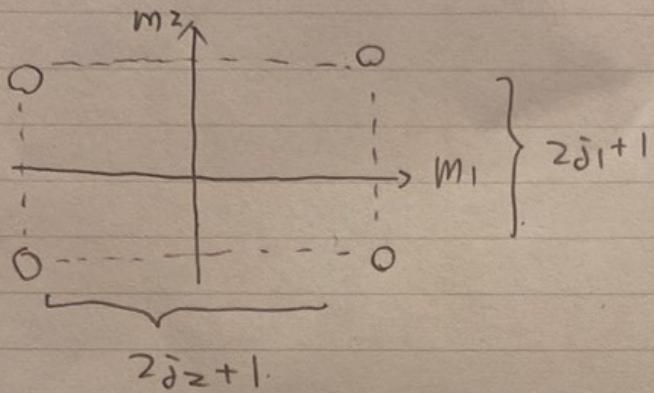
状態数を数えれば、 $\bar{j}_< = |\bar{j}_1 - \bar{j}_2|$ ,  $\bar{j}_> = \bar{j}_1 + \bar{j}_2$  で

$$\sum_{\bar{j}=\bar{j}_<} (2\bar{j}+1) = 2 \frac{1}{2} (\bar{j}_< + \bar{j}_> +) (\bar{j}_> - \bar{j}_< + 1) + (\bar{j}_> - \bar{j}_< + 1)$$

$$= (\bar{j}_> + \bar{j}_< + 1)(\bar{j}_> - \bar{j}_< + 1)$$

$$= (2\bar{j}_1 + 1)(2\bar{j}_2 + 1).$$

$$\begin{aligned} & n+n+1+\dots+m \\ & + \underbrace{m+m+\dots+m}_{n+m,\dots} \\ & m-h+1 = \\ & \bar{j}_> + \bar{j}_< = \bar{j}_1 + \bar{j}_2 + \bar{j}_1 - \bar{j}_2 = 2\bar{j}_1. \\ & \bar{j}_> - \bar{j}_< = \bar{j}_1 + \bar{j}_2 - (\bar{j}_1 - \bar{j}_2) = 2\bar{j}_2. \end{aligned}$$



これは  $\bar{j}_1 \otimes \bar{j}_2 = |\bar{j}_1 - \bar{j}_2| \oplus |\bar{j}_1 + \bar{j}_2| + 1 \oplus \dots \oplus \bar{j}_1 + \bar{j}_2$  と表す。

$$\bar{j}_1 \otimes \bar{j}_2 = \bar{j}_1 + \bar{j}_2 \oplus \bar{j}_1 + \bar{j}_2 - 1 \oplus \dots \oplus |\bar{j}_1 - \bar{j}_2|$$

(例1)  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = 1 \oplus 0$

状態数は左辺  $(2 \cdot \frac{1}{2} + 1)(2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = 2 \times 2 = 4$

右辺  $(2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 0 + 1) = 3 + 1 = 4$  ok

(例2)  $1 \otimes \frac{1}{2} = (1 + \frac{1}{2}) \oplus (1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$

左辺  $(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = 3 \times 2 = 6$

右辺  $(2 \cdot \frac{3}{2} + 1) + (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = 4 + 2 = 6$  ok

(例3)  $1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0$

左辺  $(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 1) = 3 \times 3 = 9$

右辺  $(2 \cdot 2 + 1) + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 0 + 1) = 5 + 3 + 1 = 9$  ok

(例4)  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (1 \oplus 0) \otimes \frac{1}{2} = 1 \otimes \frac{1}{2} \oplus 0 \otimes \frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$$

左辺  $2 \times 2 \times 2 = 8$

右辺  $(2 \cdot \frac{3}{2} + 1) + (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) + (2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = 4 + 2 + 2 = 8$  ok

(例5)  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = (\frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}) \otimes \frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{2} \otimes \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$$

$$= 2 \oplus 1 \oplus (1 \oplus 0) \oplus (1 \oplus 0) = 2 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0$$

左辺  $2^4 = 16$

右辺  $(2 \cdot 2 + 1) + 3 \cdot (2 \cdot 1 + 1) + 2 \cdot (0 \cdot 1 + 1) = 5 + 9 + 2 = 16$  ok