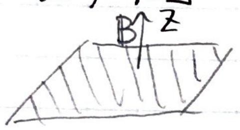
量子力学3　第11回講義まとめ

2018108855　佐藤 綾香

☆ 一様磁場下の電子系の電子状態（ランダウ準位）
A^2を無視しないで、強磁場にも適用可能な議論を行う。

「2次元」電子がある平面内に閉じ込められていると仮定し、平面内からは外に出ることはできない。



$$H = \frac{1}{2m}(p - eA)^2 = \frac{1}{2m}\pi^2$$

$\pi = p - eA \sim mv$ (古典的には)

dynamical momentum

"2次元"では x, y 平面内のみ電子は運動のみ

$\begin{pmatrix}\pi_x \\ \pi_y\end{pmatrix}$ のみ考える

$$H = \frac{1}{2m}(\pi_x^2 + \pi_y^2)$$

3つのノーベル賞
"量子ホール効果"

$$\pi_x = p_x - eA_x = \pi_x^+ \qquad B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$$
$$\pi_y = p_y - eA_y = \pi_y^+ \qquad p_{x,y} = -i\hbar\partial_{x,y}$$

$$\begin{aligned}[\pi_x, \pi_y] &= [-i\hbar\partial_x - eA_x, -i\hbar\partial_y - eA_y] \\ &= [-i\hbar\partial_x, -eA_y] + [-eA_x, -i\hbar\partial_y] \\ &= -i\hbar(-e)\{\partial_x(A_y\cdot) - A_y\partial_x\} + (-e)(-i\hbar)\{A_x\partial_y - \partial_y(A_x\cdot)\} \\ &= ie\hbar(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= ie\hbar B \qquad (eB > 0 \text{とする})\end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{e\hbar B}}\pi_x, \frac{1}{\sqrt{e\hbar B}}\pi_y\right] = i$$

よって $\frac{1}{\sqrt{e\hbar B}}\pi_{x,y} \sim$ 無次元、$\pi_{x,y}$：運動量 $\hbar$/長さ

$\sqrt{e\hbar B} \equiv \frac{\hbar}{l_B}$ として"磁気長" l_B を定義する。

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad (eB > 0)$$

$$\left[\frac{l_B}{\hbar}\pi_x, \frac{l_B}{\hbar}\pi_y\right] = i$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{l_B}{\hbar}(\pi_x + i\pi_y) \\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{l_B}{\hbar}(\pi_x - i\pi_y) \end{cases}$$ とすると、

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2}\left(\frac{l_B}{\hbar}\right)^2 \left(\underbrace{-i[\pi_x, \pi_y]}_{-i\left(\frac{l_B}{\hbar}\right)^{-2} i} + \underbrace{i[\pi_y, \pi_x]}_{i\left(\frac{l_B}{\hbar}\right)^{-2}(-i)}\right) = 1$$

逆に解いて、

$$\pi_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar}{l_B}\right)(a + a^\dagger)$$

$$\pi_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{i}\left(\frac{\hbar}{l_B}\right)(a - a^\dagger)$$

よって、

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}(\pi_x^2 + \pi_y^2) \\ &= \frac{1}{4m}\frac{\hbar^2}{l_B^2}\left\{(a + a^\dagger)^2 - (a - a^\dagger)^2\right\} \\ &= \frac{\hbar^2}{4m}\frac{eB}{\hbar}\left\{2(aa^\dagger + a^\dagger a)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\hbar\omega_c \cdot 2(a^\dagger a + 1 + a^\dagger a) \qquad \left(\omega_c = \frac{eB}{m}\right) \\ &= \frac{1}{4}\hbar\omega_c \cdot 4\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \\ &= \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad n = a^\dagger a \end{aligned}$$

まとめると、

$$H = \frac{1}{2}(\pi_x^2 + \pi_y^2) = \hbar\omega_c\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right), \quad \hat{n} = a^\dagger a, \quad [a, a^\dagger] = 1.$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$ サイクロトロン振動数

調和振動子

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle, \quad a|0\rangle = 0, \quad |0\rangle$$: 真空として

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

(古典的には、ローレンツ力で円運動（サイクトロン運動）
回転の角振動数 ω とすると、
ローレンツ力 $= evB = mr\omega^2 =$ 遠心力
$v = r\omega \longrightarrow$ $er\omega B = mr\omega^2$
$\omega = \dfrac{eB}{m} = \omega_c$)

2次元一様磁場中の電子系 $\underset{?}{=}$ 一次元調和振動子

実は E_n は縮退している。（マクロな系ではマクロな縮退

$\because$ Hと可換な物理量が存在する（同時対角化可能）
↳ guiding center

$R_x = x + \dfrac{l_B^2}{\hbar}\pi_y$, $\pi = p +$ 定数
$[x, p_x] = i\hbar = [x, \pi_x]$
$[y, p_y] = i\hbar = [y, \pi_y]$

$$[H, R_x] = \frac{1}{2m}\left[\pi_x^2 + \pi_y^2, x + \frac{l_B^2}{\hbar}\pi_y\right]$$

$$\left([\pi_x, \pi_y] = i\left(\frac{\hbar}{l_B}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2m}[\pi_x^2, x] + \frac{1}{2m}\frac{l_B^2}{\hbar}[\pi_x^2, \pi_y]$$

$$= \frac{1}{2m}\{\pi_x\underbrace{[\pi_x, x]}_{-i\hbar} + \underbrace{[\pi_x, x]}_{-i\hbar}\pi_x\} + \frac{1}{2m}\frac{l_B}{\hbar}\, i\, 2\pi_x\frac{\hbar^2}{l_B^2}$$

$$= -i\frac{\hbar}{m}\pi_x + i\frac{\hbar}{m}\pi_x = 0 \quad \text{可換!}$$

R_x, R_y の方とHは同時対角化できる！
実は、$R_y = y - \dfrac{l_B^2}{\hbar}\pi_x$ も $[H, R_y] = 0$ と可換でも $[R_x, R_y] \neq 0$

ランダウ縮退

ゲージを固定して、具体的に考える

ランダウゲージ

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rot}A = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_y - \partial_y A_x \\ \underbrace{\partial_x A_y}_{B} - \underbrace{\partial_y A_x}_{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$$H = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2m}(p_y - eBx)^2$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{1}{2m}(-i\hbar\partial_y - eBx)^2$$

$$H\Psi(x,y) = E\Psi(x,y)$$

$\Psi(x,y) = e^{ik_y y}\cdot\varphi(x)$ 変数分離形

$\partial_y \sim ik_y$ より

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m}(\underbrace{\hbar k_y - eBx}_{(-eB)(x-\frac{\hbar k_y}{eB})})^2\right]\varphi(x) = E\varphi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(eB)^2}{2m}\left(x - \frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2\right]\varphi(x) = E\varphi(x)$$

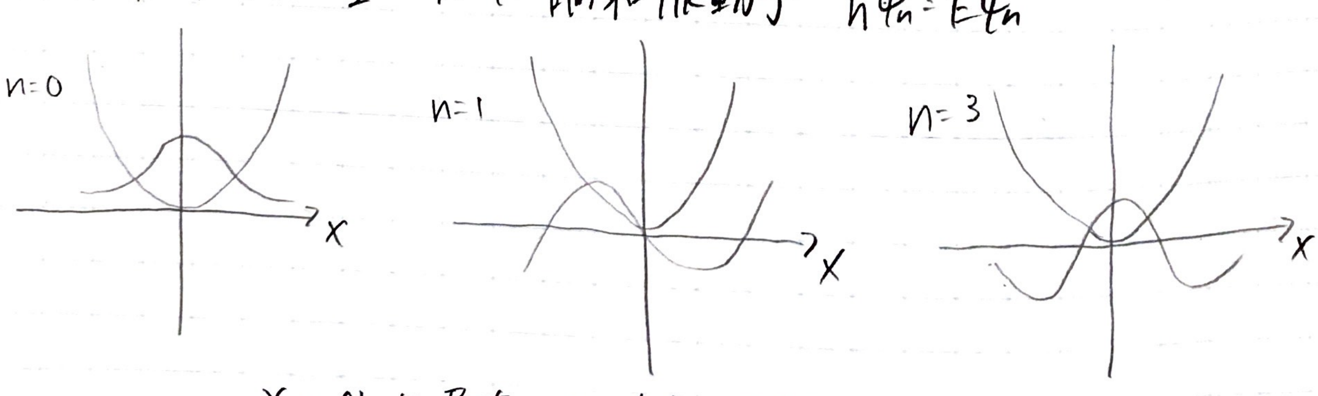
〃 $\frac{1}{2}m\omega^2$ とする調和振動子を念頭に → $m\omega^2 = \frac{(eB)^2}{m} \to \omega = \frac{eB}{m}$

サイクロトロン振動数

$X = x - \frac{\hbar k_y}{eB} = x - x_{k_y}$ として、$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dX}$

$$\left[\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dX^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2}\right]\varphi = E\varphi$$

ポテンシャル $\frac{1}{2}m\omega^2X^2$ 中の調和振動子 $h\varphi_n = E\varphi_n$



$X \sim 0$ に局在した波動関数

$x \sim x_{k_y}$ $\quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0, 1, 2, \ldots$

k_y のとり方 → 縮退

全系：y方向にはL_yの周期的境界条件

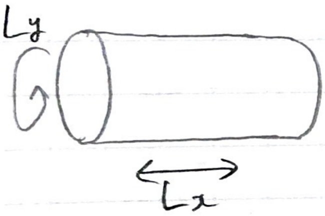
$e^{ik_y\cdot 0} = e^{ik_yL_y}$

→ $k_y = \frac{2\pi}{L_y}\times m \quad m=0,\pm1,\pm2.$

$\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y}$ ごとに1つある.

x方向には

0〜L_xの有限系



$0 < x_{k_y} < L_x$ であるとする.

$x_{k_y} = \frac{\hbar k_y}{eB}$ 　$0 < k_y < \frac{eB}{\hbar}L_x$,

$\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y}$ より.

許されるk_yの数 $N_D = \frac{eBL_x}{\hbar}\cdot\frac{1}{\Delta k_y}$

$= \frac{eBL_xL_y}{h} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$ 　 $\Phi_0 = \frac{h}{e}$: flux quantum

つまり、各ランダウ準位はN_D重に縮退

$N_D = \frac{\Phi}{\Phi_0}$, $\Phi = BS$: 系をつらぬく全磁束

$S = L_xL_y$ 　 Φ_0で計って何本あるかがN_D!

◎ 2次元の自由粒子系の状態密度について（磁場のない場合）

$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ について $H\phi_k = \varepsilon\phi_k$ 　 $\phi_k = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{i(k_xx+k_yy)}$

が一辺Lの正方形について周期的境界条件をみたすとすると、$e^{ik_xL} = e^{ik_yL} = 1 \Rightarrow \Delta k = \frac{2\pi}{L}$

2次元なのでk平面上$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ごとに1状態

$\varepsilon = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ だからエネルギーε以下の状態数N_εとして半径kの円内の状態がN_ε

$N_\varepsilon = \frac{\pi k^2}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} = \frac{L^2}{4\pi^2}\pi k^2 = \frac{L^2}{4\pi}\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} = L^2\frac{m}{2\pi\hbar^2}\varepsilon$

エネルギー幅δε内の状態 $D(\varepsilon)\delta\varepsilon$ として

$D(\varepsilon) = \frac{dN_\varepsilon}{d\varepsilon} = L^2\frac{m}{2\pi\hbar^2} = S\frac{m}{2\pi\hbar^2}$: 定数

$D(\varepsilon) = S\frac{m}{2\pi\hbar^2}$

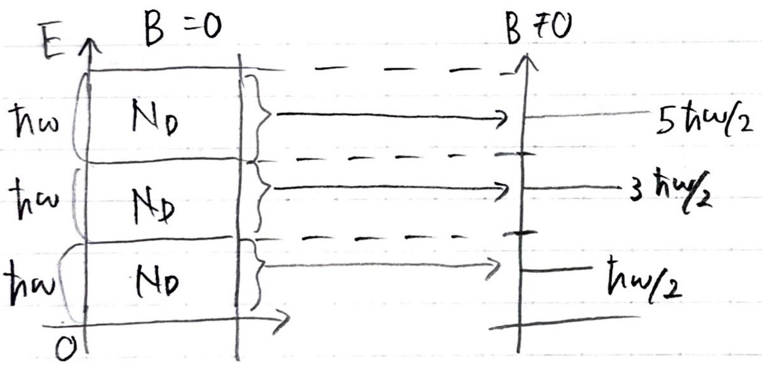
→ ランダウ準位間隔 $\Delta E = \hbar\omega = \hbar\frac{eB}{m}$ 内にある状態数は、

$$D\Delta E = S\frac{m}{2\pi\hbar^2}\cdot\hbar\frac{eB}{m}$$

$$= SB\frac{e}{h} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad , \quad \Phi = BS, \quad \Phi_0 = \frac{h}{e}$$

$= N_D$: ランダウ準位の縮退度に等しい!

まとめると、



ランダウ準位間にあった(B=0)状態がランダウ準位1つにすべて縮退する！

"ランダウ縮退の物理的意味"

1次元調和振動子とエルミート方程式

$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, $[x, p] = i\hbar$, $[a, a^\dagger] = 1$.

$x = A(a + a^\dagger)$, $p = Bi(a - a^\dagger)$ として A, B 実.

$[x, p] = iAB\{-[a, a^\dagger] + [a^\dagger, a]\}$

$= -2iAB$

$= i\hbar$ 　よって $AB = -\frac{\hbar}{2}$

$H = -\frac{B^2}{2m}(a - a^\dagger)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (a + a^\dagger)^2$, $a^2, a^{\dagger 2}$ が消えるには、

$\frac{B^2}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(\frac{\hbar}{2B}\right)^2$, $B^4 = \frac{1}{4}m^2\omega^2\hbar^2$

$B = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\hbar m\omega}$, $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}l$, $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ ・量子化で生まれた長さスケール

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{l}$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}l(a + a^\dagger) \\ p &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\frac{\hbar}{l}(a - a^\dagger) \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{l} + i\frac{l}{\hbar}p\right) ☆ \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{l} - i\frac{l}{\hbar}p\right) ☆ \end{aligned}$$

$H = -\frac{B^2}{2m}(-aa^\dagger - a^\dagger a) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (aa^\dagger + a^\dagger a)$

$= \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}(\underbrace{2aa^\dagger + 2a^\dagger a}_{4(a^\dagger a + \frac{1}{2})})$

$= \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$

$= \hbar\omega(\hat{n} + \frac{1}{2})$ ☆

真空 $|0\rangle$, $a|0\rangle = 0$ に対する波動関数を $\phi_0(x)$ とすると、

$$\left(\frac{x}{l}+i\frac{l}{\hbar}p\right)\phi_0 = \left(\frac{x}{l}+i\frac{l}{\hbar}\frac{\hbar}{i}\partial_x\right)\phi_0 = \left(\frac{x}{l}+l\partial_x\right)\phi_0 = 0$$

$$\phi_0 = C e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}} \quad \because \partial_x\phi_0 = -\frac{1}{2}\frac{2x}{l^2}\phi_0 = -\frac{x}{l^2}\phi_0$$

規格化条件から

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\phi_0|^2 = |C|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{l^2}} \qquad x = l t^{\frac{1}{2}} \quad dx = \frac{1}{2} l t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= |C|^2 \cdot 2\int_0^{\infty} \frac{1}{2} l\, dt\, t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}$$

$$= |C|^2 l \underbrace{\int_0^{\infty} dt\, e^{-t} t^{-\frac{1}{2}}}_{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

$$= |C|^2 \pi^{\frac{1}{2}} l \qquad \left(l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right)$$

$$\therefore C = \left(\frac{1}{l^2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$ に対する固有状態 $\phi_n(x)$ として

$$H\phi_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\phi_n$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt{2}^n}\left(\frac{x}{l}-i\frac{l}{\hbar}p\right)^n\phi_0 = C\frac{1}{\sqrt{n!}\,2^{n/2}}\left(\frac{x}{l}-l\partial_x\right)^n e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$$

$\xi = \frac{x}{l}$ として、$\partial_\xi = l\partial_x$、任意の関数 $g(\xi)$ に対して、

$$e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi)g = -\partial_\xi(e^{-\xi^2/2}g)$$

$$\therefore e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi) = (-\partial_\xi)e^{-\xi^2/2}$$

$$\phi_n = C\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}(\xi-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2/2}$$

$$(\xi-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2/2} = e^{\xi^2/2}e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi)(\xi-\partial_\xi)^{n-1}e^{-\xi^2/2}$$

$$= e^{\xi^2/2}(-\partial_\xi)\underbrace{e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi)^{n-1}}e^{-\xi^2/2}$$

$$e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi)(\xi-\partial_\xi)^{n-2}e^{-\xi^2/2}$$

$$e^{\xi^2/2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2/2}e^{-\xi^2/2}$$

$$= C\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{\xi^2/2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2}$$

$$= C\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{-\xi^2/2}\underbrace{e^{\xi^2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2}}_{\text{多項式 } H_n(\xi)}$$

$H_n(\xi)$：エルミート多項式

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{-\xi^2/2}H_n(\xi)$$

ロドリゲスの公式☆
（エルミート多項式に関する）

規格直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_n^*(x)\phi_m(x) = \delta_{n,m}$$

$$x = l\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\xi$$

$$dx = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}d\xi$$

$$= C^2 \frac{1}{2^n n!}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi)$$

$$\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$$

よって、$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = 2^n n! \sqrt{\pi}\,\delta_{n,m}$$

エルミート多項式の規格直交性

まとめⒶ

エルミート多項式

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2}$$ ：ロドリゲスの公式

$H_0(\xi) = 1$

$H_1(\xi) = 2\xi$

規格直交性 $$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = \sqrt{\pi}\, 2^n n!\, \delta_{nm}$$

まとめⒷ

1次元調和振動子

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad , \quad p = -i\hbar\partial_x$$

$$H\phi_n(x) = E_n\phi_n(x) \quad , \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}} e^{-x^2/2l^2} H_n\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$ ："量子化長"