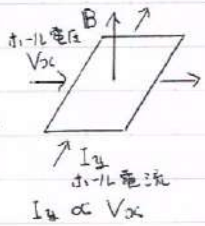
201810841 岡野至仁

トポロジカル相としての量子ホール状態

一様磁場下の電子状態（ランダウ準位）

$H = \frac{1}{2m}(p - eA)^2 = \frac{1}{2m}\pi^2$

$\pi = p - eA \sim mv$



電子は平面から出られないので、

$\begin{pmatrix} \pi_x \\ \pi_y \end{pmatrix}$ のみ考える

従って、$H = \frac{1}{2m}(\pi_x^2 + \pi_y^2)$

x, y平面内のみ電子は運動する＝量子ホール効果

1985年 量子ホール効果の発見

Klaus von Klitzing

ホール伝導度 $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{e^2}{h} \times 1, 2, 3 \cdots$

$I_y = \sigma_{yx} V_x$

↑ 整数量子ホール効果
極めて精度の高い
→標準抵抗の定義へ

1998年 分数量子ホール効果の発見

Robert B. Loughlim（理論）

H.L. Störmer

D.C. Tsu（実験）

$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \times \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots \frac{1}{奇数}$ に量子化

◎分数統計（フェルミやボーズと異なる統計）

：Anyon 粒子の入れかえで $e^{i\frac{2\pi}{奇数}}$ の位相

◎分数電荷

$\frac{e}{3}, \frac{e}{5}$ などが現れる

電子がつくる電子以外の粒子

・多体相互作用（クーロン力）が重要

・量子液体での励起から粒子

2016年 トポロジカル相の理論的発見

D. Thouless

F.D.M. Holdane

J.M. Kosterlitz

$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \times \frac{整数}{奇数}$ と量子化する理由がトポロジカル相にある

量子ホール効果がおきる物理量が典型例

エッジ状態を観測

バルク－エッジ対応

ランダウ準位とランダウ縮退

$H = \frac{1}{2m}(p - eA)^2 = \frac{1}{2m}(\pi_x^2 + \pi_y^2)$

$\pi_i = p_i - eA_i = \pi_i^\dagger$

π_i の交換関係は、

$B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$, $p_{x,y} = -i\hbar\partial_{x,y}$

の2式より、

$[\pi_x, \pi_y]$

$= [-i\hbar\partial_x - eA_x, -i\hbar\partial_y - eA_y]$

$= [-i\hbar\partial_x, -eA_y] + [-eA_x, -i\hbar\partial_y]$

$= ie\hbar(\partial_x A_y - A_y\partial_x) + ie\hbar(A_x\partial_y - \partial_y A_x)$

$= ie\hbar(\partial_x A_y - \partial_y A_x)$

$= ie\hbar B$ （$eB > 0$ とする）

従って $\left[\frac{1}{\sqrt{e\hbar B}}\pi_x, \frac{1}{\sqrt{e\hbar B}}\pi_y\right] = i$ より、

$\frac{1}{\sqrt{e\hbar B}}\pi_{x,y}$: 無次元量，$\pi_{x,y}$: 運動量（長さ/$\hbar$）

$\sqrt{e\hbar B} = \frac{\hbar}{l_B}$ として磁気長 l_B を定義すると

$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ （$eB > 0$）

$\left[\frac{l_B}{\hbar}\pi_x, \frac{l_B}{\hbar}\pi_y\right] = i$

また、消滅演算子 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{l_B}{\hbar}(\pi_x + i\pi_y)$ とすると、

$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{l_B}{\hbar}(\pi_x - i\pi_y)$

$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2}\left(\frac{l_B}{\hbar}\right)^2\left(-i[\pi_x, \pi_y] + i[\pi_y, \pi_x]\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{l_B}{\hbar}\right)^2\left(-i\left(\frac{l_B}{\hbar}\right)^{-2} i - i\left(\frac{l_B}{\hbar}\right)^{-2} i\right)$

$= 1$

逆に解いて

$\pi_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar}{l_B}\right)(a + a^\dagger)$

$\pi_y = \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(\frac{\hbar}{l_B}\right)(a - a^\dagger)$

$H = \frac{1}{2m}(\pi_x^2 + \pi_y^2)$

$= \frac{1}{4m}\frac{\hbar^2}{l_B^2}\{(a + a^\dagger)^2 - (a - a^\dagger)^2\}$

$= \frac{\hbar^2}{4m}\frac{eB}{\hbar}(aa^\dagger + a^\dagger a) \cdot 2$

$= \frac{1}{4}\hbar\frac{eB}{m} \cdot 2([a, a^\dagger] + a^\dagger a + a^\dagger a)$

$= \hbar\frac{eB}{m}(a^\dagger a + \frac{1}{2})$

$= \hbar\omega_c(\hat{n} + \frac{1}{2})$, $\omega_c = \frac{eB}{m}$, $n = a^\dagger a$

この ω_c は サイクロトロン振動数 である

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$, $a|0\rangle = 0$, $|0\rangle$: 真空 として

$H|n\rangle = E_n|n\rangle$, $E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$

古典論では、ローレンツ力で円運動（サイクロトロン運動）しており、回転の角振動数を ω とすると

ローレンツ力 $= evB = mr\omega^2$

$\therefore\ \omega = \frac{eB}{m} = \omega_c$

2次元一様磁場中の電子系は一次元調和振動子のように振る舞うが、実際は E_n は縮退している（マクロな系ではマクロな縮退）。これをランダウ縮退という

このような性質を示すのは、H と可換な（同時対角化可能な）物理量が存在するからである。その物理量 (gunding center) R_x は、

$$R_x = x + \frac{l_B^2}{\hbar}\Pi_y$$

ここで、$[x, \Pi_x] = [x, p_x] = i\hbar$ であるから、

$$\begin{aligned}
[H, R_x] &= \frac{1}{2m}\left[\Pi_x^2 + \Pi_y^2,\ x + \frac{l_B^2}{\hbar}\Pi_y\right] \\
&= \frac{1}{2m}[\Pi_x^2, x] + \frac{1}{2m}\frac{l_B^2}{\hbar}[\Pi_x^2, \Pi_y] \\
&= \frac{1}{2m}\{\Pi_x[\Pi_x, x] + [\Pi_x, x]\Pi_x\} \\
&\qquad + \frac{1}{2m}\frac{l_B^2}{\hbar} i 2\Pi_x \frac{\hbar^2}{l_B^2} \\
&= -i\frac{\hbar}{m}\Pi_x + i\frac{\hbar}{m}\Pi_x \\
&= 0
\end{aligned}$$

同様に、$R_y = y + \frac{l_B^2}{\hbar}\Pi_x$ についても

$$[H, R_y] = 0$$

ただし、$[R_x, R_y] \neq 0$ であるため、H は R_x, R_y の一方と同時対角化できる

ランダウ縮退の物理的意味

ランダウ縮退の物理的意味について、ゲージを固定して考える

$A = \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix}$ とする（ランダウゲージ）と、この A について

$$\nabla \times A = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

であり、$\nabla \times A = B$ は満たされている

この A を用いると H は

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m}(P - eA)^2 \\
&= \frac{1}{2m}P_x^2 + \frac{1}{2m}(P_y - eBx)^2 \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{1}{2m}(-i\hbar\partial_y - eBx)^2
\end{aligned}$$

ここで $H\Psi(x,y) = E\Psi(x,y)$ であるが、$\Psi(x,y)$ を $\Psi(x,y) = e^{ik_y y}\psi(x)$ と変数分離形に仮定して、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2m}(\hbar k_y - eBx)^2\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(eB)^2}{2m}\left(x - \frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

調和振動子の運動を念頭に考えて

$$\frac{(eB)^2}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 \rightarrow \omega = \frac{eB}{m} = \omega_c$$

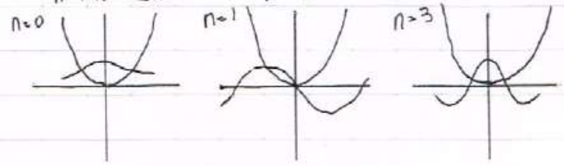
$X = x - \frac{\hbar k_y}{eB} = x - x_{k_y}$ と変換すると、$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dX}$

よって、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dX^2} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2\right]\psi = E\psi$$

ポテンシャル $\frac{1}{2}m\omega^2X^2$ 中の調和振動子について

$$\hbar\psi_n = E_n\psi_n,\quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),\ n = 0, 1, 2, \cdots$$



k_y のとり方が、縮退に影響を与えることになる。

ここで、$0 \sim x_{k_y} \sim L_x$, $0 \sim y \sim L_y$ の有限系について考えると、境界条件より、

$$e^{ik_y\cdot 0} = e^{ik_y L_y} \rightarrow k_y = \frac{2\pi}{L_y}\times m\ (m = 0, \pm 1, \cdots)$$

x_{k_y} の範囲より、

$$0 < k_y < L_x\cdot\frac{eB}{\hbar}$$

従って、k_y は $N_B = \frac{eBL_x}{\hbar}/\Delta k_y = \frac{eBL_xL_y}{2\pi\hbar}$ 個の値を取れる

すなわち、各ランダウ準位は N_B 重に縮退する

また、磁束量子 $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e}$ より、$\Phi = BL_xL_y = BS$ とすると

$$N_B = \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Φ は S を貫く磁束であり、Φ_0 単位で数えた値が N_B

◎ 2次元の自由粒子系の状態密度について（磁場のない時）

この場合 $H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ であり、$H\varphi_k = E\varphi_k$ より

$$\varphi_k = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = e^{i(k_x x + k_y y)}$$

一辺 L の正方形について周期的境界条件を満たすとすると、

$$e^{ik_xL} = e^{ik_yL} = 1 \rightarrow \Delta k = \frac{2\pi}{L}$$

2次元であることを踏まえると、平面上で $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ ごとに状態が変化する

従って、半径 k の円内におけるエネルギー E 以下の状態数 N_E は

$$N_E = \pi k^2/\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}k^2 = \frac{L^2}{4\pi}\cdot E\cdot\frac{2m}{\hbar^2} = L^2\frac{m}{2\pi\hbar^2}E$$

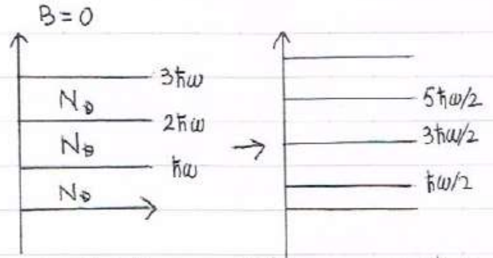
エネルギー幅 δE 内の状態を $D(E)\delta E$ として

$$D(E) = \frac{dN_E}{dE} = L^2\frac{m}{2\pi\hbar^2} = S\frac{m}{2\pi\hbar^2}\ ;\text{定数}$$

よって、ランダウ準位間幅 $\Delta E=\hbar\omega=\hbar\frac{eB}{m}$ 内にある状態数は

$$D\Delta E = S\frac{m}{2\pi\hbar^2}\hbar\frac{eB}{m} = S\cdot eB\cdot\frac{1}{2\pi\hbar} = \frac{\Phi}{\Phi_0} = N_\Phi$$

まとめると



ランダウ準位間にあった状態がランダウ準位にすべて縮退する

(ランダウ縮退の物理的意味)

調和振動子とエルミート多項式

実数A,Bを用いて

$$x=A(a+a^\dagger),\quad p=iB(a-a^\dagger)$$

とすると、$[a,a^\dagger]=1$より

$$[x,p]=iAB\{-[a,a^\dagger]+[a^\dagger,a]\}=-2iAB$$

$[x,p]=i\hbar$ より $AB=-\frac{\hbar}{2}$

ハミルトニアンは

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac12 m\omega^2x^2=-\frac{B^2}{2m}(a-a^\dagger)^2+\frac12 m\omega^2A^2(a+a^\dagger)^2$$

$a^2, a^{\dagger 2}$ がこの式より消去される条件は、

$$\frac{B^2}{2m}=\frac12 m\omega^2A^2=\frac12 m\omega^2\left(-\frac{\hbar}{2B}\right)^2=\frac{m\omega^2\hbar^2}{8B^2}$$

$$\therefore B^4=\frac14 m^2\omega^2\hbar^2$$

よって、$B=-\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{\hbar m\omega}=-\frac{1}{\sqrt2}\hbar/l$, $A=\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}=\frac{1}{\sqrt2}l$

すなわち、

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt2}l(a+a^\dagger) \\ p=\frac{1}{i\sqrt2}\frac{\hbar}{l}(a-a^\dagger)\end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{x}{l}+i\frac{l}{\hbar}p\right) \\ a^\dagger=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{x}{l}-i\frac{l}{\hbar}p\right)\end{cases}$$

この条件下で

$$H=\frac14\hbar\omega\{-(a-a^\dagger)^2+(a+a^\dagger)^2\}$$
$$=\frac14\hbar\omega(2aa^\dagger+2a^\dagger a)$$
$$=\hbar\omega\left(\hat n+\frac12\right)$$

真空 $|0\rangle$、$a|0\rangle=0$ に対する波動関数を $\varphi_0(x)$ とすると

$$\left(\frac{x}{l}+i\frac{l}{\hbar}p\right)\varphi_0=\left(\frac{x}{l}+l\partial_x\right)\varphi_0=0$$

ここで $\partial_x\varphi_0=-\frac{x}{l^2}=-\frac12\frac{2x}{l^2}$ が得られるので、

$$\varphi_0=Ce^{-\frac12\frac{x^2}{l^2}}$$

規格化条件より、

$$1=\int_{-\infty}^\infty dx\,|\varphi_0|^2$$
$$=|C|^2\int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-\frac{x^2}{l^2}}$$
$$=2|C|^2\int_0^\infty \frac12 l\,dt\, t^{-\frac12}e^{-t}$$
$$=|C|^2 l\int_0^\infty dt\, e^{-t}t^{-\frac12}$$
$$=|C|^2 l\,\Gamma\left(\frac12\right)$$
$$=|C|^2\pi^{\frac12}l$$
$$\therefore C=\left(\frac{1}{l^2\pi}\right)^{\frac14}=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac14}$$

よって、$\varphi_0=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac14}e^{-\frac12\frac{x^2}{l^2}}$

$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$ に対する固有状態 $\varphi_n(x)$ として

$$H\varphi_n=\hbar\omega\left(\hat n+\frac12\right)\varphi_n$$

ここで

$$\varphi_n=\frac{1}{\sqrt{n!}}\frac{1}{\sqrt2^n}\left(\frac{x}{l}-i\frac{l}{\hbar}p\right)^n\varphi_0=C\frac{1}{\sqrt{n!}\,2^{n/2}}\left(\frac{x}{l}-l\partial_x\right)^n e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$$

$\xi=\frac{x}{l}$ とすると $\partial_\xi=l\partial_x$ であり、任意の関数 $g(\xi)$ に対して

$$e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi)g(\xi)=-\partial_\xi\left(e^{-\xi^2/2}g(\xi)\right)$$

ゆえに、

$$\varphi_n=C\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}(\xi-\partial_\xi)^n e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$
$$=C\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{\xi^2/2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2}$$
$$=C\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{-\xi^2/2}e^{\xi^2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2}$$
$$=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac14}\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{-\xi^2/2}H_n(\xi)$$

規格直交性について考える

$$\int_{-\infty}^\infty dx\,\varphi_n^*(x)\varphi_m(x)=\delta_{nm}$$
$$\Leftrightarrow C^2\frac{1}{2^n n!}\int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi)=\delta_{nm}$$
$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^\infty d\xi\, e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi)=2^n n!\sqrt\pi\,\delta_{nm}$$

まとめ

エルミート多項式

$H_n(\xi)=e^{\xi^2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2}$:ロドリゲスの公式

規格直交性

$$\int_{-\infty}^\infty d\xi\, e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi)=\sqrt\pi\, 2^n n!\,\delta_{nm}$$

1次元調和振動子

$$H=\frac{1}{2m}p^2+\frac12 m\omega^2x^2,\quad p=-i\hbar\partial_x$$
$$H\varphi_n(x)=E_n\varphi_n(x),\quad E_n=\hbar\omega\left(\hat n+\frac12\right)$$
$$\varphi_n(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac14}\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{-x^2/2l^2}H_n\left(\frac{x}{l}\right)$$

$l=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$:量子化長