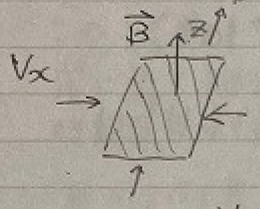
201810834 No.

量子力学第11回　相原大地　Date

・一様磁場下の電子系の電子状態（ランダウ準位）

電子はx,y平面内のみ運動



$H = \frac{1}{2m}(\vec{p}-e\vec{A})^2$

$= \frac{1}{2m}\vec{\pi}^2$

$\vec{\pi} = \vec{p}-e\vec{A} \sim m\vec{v}$（古典的には）: dynamical momentum

$I_y \propto V_x$

ホール電流　ホール電圧

2次元 $\begin{pmatrix}\pi_x \\ \pi_y\end{pmatrix}$ のみ考える

$H = \frac{1}{2m}(\pi_x^2+\pi_y^2)$

1985. Klaus von Klitzing

量子ホール効果の発見

ホール伝導度 $\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\times 1,2,3,\cdots$　整数量子ホール効果

$\quad\;\; \| \\ -\sigma_{yx}$

→ 標準抵抗の定義

$I_y = \sigma_{yx}V_x$

1998. Robert B. Laughlin

H. L. Störmer

D. C. Tsui

$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\times\frac{1}{3},\frac{1}{5},\cdots\ \frac{1}{奇数}$ に量子化　分数量子ホール効果

◎ 分数統計（fermi粒子でもbose粒子でもない）Anyon

→ 粒子の入れかえで $e^{i2\pi\frac{1}{3}}$ の位相（$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\times\frac{1}{3}$ の場合）

分数電荷 $\frac{e}{3},\frac{e}{5}$ なども現れる

電子がつくる電子以外の粒子

・多体相互作用（クーロン力）が重要

・量子液体での励起 ～ 粒子

2016. トポロジカル相の理論的発見

D. Thouless

F.D.M. Haldane

J.M. Kosterlitz

$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\times$ (整数)(分数) に量子化するのはなぜ

⇒ トポロジカルな理由

トポロジカル相：量子ホール効果がおきる物質相がその典型例

実験：エッジ状態

バルク－エッジ対応

No.
Date

$$H=\frac{1}{2m}(\Pi_x^2+\Pi_y^2)$$

$$\Pi_x = P_x - eA_x = \Pi_x^\dagger \qquad B=\partial_x A_y - \partial_y A_x$$

$$\Pi_y = P_y - eA_y = \Pi_y^\dagger \qquad P_{x,y} = -i\hbar\partial_{x,y}$$

$$[\Pi_x,\Pi_y] = [-i\hbar\partial_x - eA_x, -i\hbar\partial_y - eA_y]$$
$$= [-i\hbar\partial_x, -eA_y] + [-eA_x, -i\hbar\partial_y]$$
$$= -i\hbar(-e)\{\partial_x(A_y\cdot) - A_y\partial_x\} + (-e)(-i\hbar)\{A_x\partial_y - \partial_y(A_x\cdot)\}$$
$$= ie\hbar(\partial_x A_y - \partial_y A_x)$$
$$= ie\hbar B \qquad (eB>0 とする)$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{e\hbar B}}\Pi_x, \frac{1}{\sqrt{e\hbar B}}\Pi_y\right] = i$$, $\frac{1}{\sqrt{e\hbar B}}\Pi_{x,y}$ ~ 無次元 $\Pi_{x,y}$:運動量($\hbar$/長さ)

$\sqrt{e\hbar B} \equiv \hbar/l_B$ として"磁気長" l_B を定義.

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$$

$$\left[\frac{l_B}{\hbar}\Pi_x, \frac{l_B}{\hbar}\Pi_y\right] = i$$

$$\begin{cases} a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{l_B}{\hbar}(\Pi_x + i\Pi_y) \\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{l_B}{\hbar}(\Pi_x - i\Pi_y) \end{cases}$$ とすると,

$$[a,a^\dagger] = \frac{1}{2}\left(\frac{l_B}{\hbar}\right)^2\Big(\underbrace{-i[\Pi_x,\Pi_y]}_{-i\left(\frac{\hbar}{l_B}\right)^2 i} + \underbrace{i[\Pi_y,\Pi_x]}_{i\left(\frac{\hbar}{l_B}\right)^2(-i)}\Big) = 1$$

逆に解いて,

$$\begin{cases} \Pi_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar}{l_B}\right)(a+a^\dagger) \\ \Pi_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{i}\left(\frac{\hbar}{l_B}\right)(a-a^\dagger) \end{cases}$$

$$[a,a^\dagger]=1$$

$$H = \frac{1}{2m}(\Pi_x^2+\Pi_y^2) \qquad 2(aa^\dagger + a^\dagger a) = 4(a^\dagger a + 1/2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4m}\frac{\hbar^2}{l_B^2}}\{(a+a^\dagger)^2 - (a-a^\dagger)^2\} = \hbar\omega_c(n+\tfrac{1}{2}) \quad , n = a^\dagger a$$

$$\frac{\hbar^2}{4m}\frac{eB}{\hbar} = \frac{1}{4}\hbar\frac{eB}{m} = \frac{\hbar}{4}\omega_c \quad , \omega_c \equiv \frac{eB}{m}$$

まとめると

$H=\frac{1}{2m}(\Pi_x^2+\Pi_y^2)=\hbar\omega_c(n+\frac{1}{2})$, $n=a^\dagger a$, $[a,a^\dagger]=1$

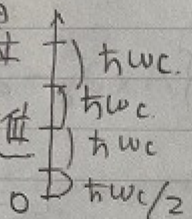
$\omega_c=\frac{eB}{m}$: サイクロトロン振動数

"調和振動子"

$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$, $a|0\rangle=0$, $|0\rangle$: 真空として

等間隔
energy準位

Landau準位



$H|n\rangle=E_n|n\rangle$, $E_n=\hbar\omega_c(n+\frac{1}{2})$

古典的にはローレンツ力で円運動(サイクロトロン運動)

回転の角振動数 ω とすると

ローレンツ力 $= evB = mr\omega^2 =$ 遠心力

$v=r\omega$ → $er\omega B=mr\omega^2$

$\omega=\frac{eB}{m}=\omega_c$

2次元一様磁場中の電子系

‖ ?

一次元調和振動子

Landau縮退

→ 実は E_n は縮退している(マクロな系ではマクロな縮退)

∵) Hと可換な物理量が存在する(同時対角化可能)

"guiding cender"

・$R_x=x+\frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_y$, $\vec{\Pi}=\vec{p}+$定数

$[x,p_x]=i\hbar=[x,\Pi_x]$

$[y,p_y]=i\hbar=[y,\Pi_y]$

$$[H,R_x]=\frac{1}{2m}[\Pi_x^2+\Pi_y^2,\ x+\frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_y]$$

$[\Pi_x,\Pi_y]=i\left(\frac{\hbar}{\ell_B}\right)^2$

$$=\frac{1}{2m}[\Pi_x^2,x]+\frac{1}{2m}\frac{\ell_B^2}{\hbar}[\Pi_x^2,\Pi_y]$$

$$=\frac{1}{2m}\{\Pi_x\underbrace{[\Pi_x,x]}_{=-i\hbar}+\underbrace{[\Pi_x,x]}_{=-i\hbar}\Pi_x\}+\frac{1}{2m}\frac{\ell_B^2}{\hbar}2i\left(\frac{\hbar}{\ell_B}\right)^2\Pi_x$$

$$=-i\frac{\hbar}{m}\Pi_x+i\frac{\hbar}{m}\Pi_x=0$$: 可換

実は $R_y=y-\frac{\ell_B^2}{\hbar}\Pi_x$ も $[H,R_y]=0$ と可換 でも $[R_x,R_y]\neq0$

R_x, R_y の一方とHは同時対角化可能

Landau縮退

ゲージを固定して具体的に考える

Landau gauge

$$A=\begin{pmatrix}0\\Bx\\0\end{pmatrix},\quad \vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}$$

$$H=\frac{1}{2m}p_x^2+\frac{1}{2m}(p_y-eBx)^2$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2+\frac{1}{2m}(-i\hbar\partial_y-eBx)^2$$

$$H\psi(x,y)=E\psi(x,y)$$

$$\psi(x,y)=e^{ik_y y}\psi(x)\quad \text{変数分離形}$$

$e^{ik_y y}$である.

$$\partial_y\sim ik_y$$

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2m}(\underbrace{\hbar k_y-eBx}_{(-eB)\left(x-\frac{\hbar k_y}{eB}\right)})^2\Big]\psi(x)=E\psi(x)$$

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{(eB)^2}{2m}\left(x-\frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2\Big]\psi(x)=E\psi(x)$$

サイクロトロン振動数

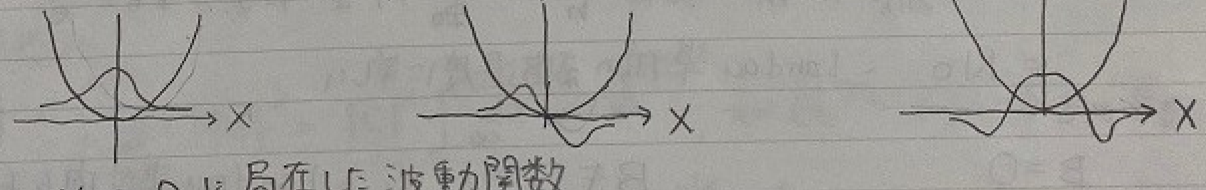
$\frac{(eB)^2}{2m}=\frac{1}{2}m\omega^2$とする(調和振動子を念頭に) $\rightarrow m\omega^2=\frac{(eB)^2}{m}\rightarrow\omega=\frac{eB}{m}$

$$X=x-\underbrace{\frac{\hbar k_y}{eB}}_{x_{k_y}}=x-x_{k_y}\quad\text{として}\quad\frac{d}{dx}=\frac{d}{dX}$$

$$\Big[\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dX^2}+\frac{1}{2}m\omega^2X^2}_{h}\Big]\psi=E\psi$$

potential $\frac{1}{2}m\omega^2X^2$中の調和振動子 $h\psi=E\psi$

n=0　　n=1　　n=2　　…



$X\sim0$に局在した波動関数

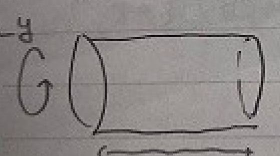
$x\sim x_{k_y}$　$E_n=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$　$n=0,1,2,\cdots$

k_yのとり方→縮退

全系：y方向にはLyの周期的境界条件

$$e^{ik_y\cdot 0}=e^{ik_y\cdot L_y}\rightarrow k_y=\frac{2\pi}{L_y}\times m\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$\Delta k_y=\frac{2\pi}{L_y}$ごとに1つ



x方向には

0〜Lxの有限系

$0<\underset{\frac{\hbar k_y}{eB}}{x_{k_y}}<L_x$であるとする

$0 < k_y < \frac{eB}{\hbar} L_x$, $\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y}$

→ 許されるk_yの数 $N_0 = \frac{eBL_x}{\hbar} / \Delta k_y = \frac{eBL_xL_y}{h} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$, $\Phi_0 = \frac{h}{e}$: 磁束量子

つまり Landau 準位はN_0重に縮退

$N_0 = \frac{\Phi}{\Phi_0}$, $\Phi = BS$: 系を貫く全磁束

$S = L_xL_y$ 　Φ_0で計って何本あるか

@ 2次元の自由粒子系の状態密度について（磁場のない時）

$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ について $H\phi_k = \varepsilon\phi_k$

$\phi_k = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = e^{i(k_x x + k_y y)}$

一辺Lの正方形について周期的境界条件を満たすとすると

$e^{ik_xL} = e^{ik_yL} = 1 \rightarrow \Delta k = \frac{2\pi}{L}$

2次元なのでk平面上$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ごとに1状態

$\varepsilon = \frac{\hbar^2k^2}{2m}$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ だから energy ε以下の状態数N_εとして

半径kの円内の状態がN_ε

$$N_\varepsilon = \pi k^2 / \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}\pi k^2 = \frac{L^2}{4\pi}\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2} = L^2\frac{m}{2\pi\hbar^2}\varepsilon$$

energy幅$\delta\varepsilon$内の状態 $D(\varepsilon)\delta\varepsilon$として

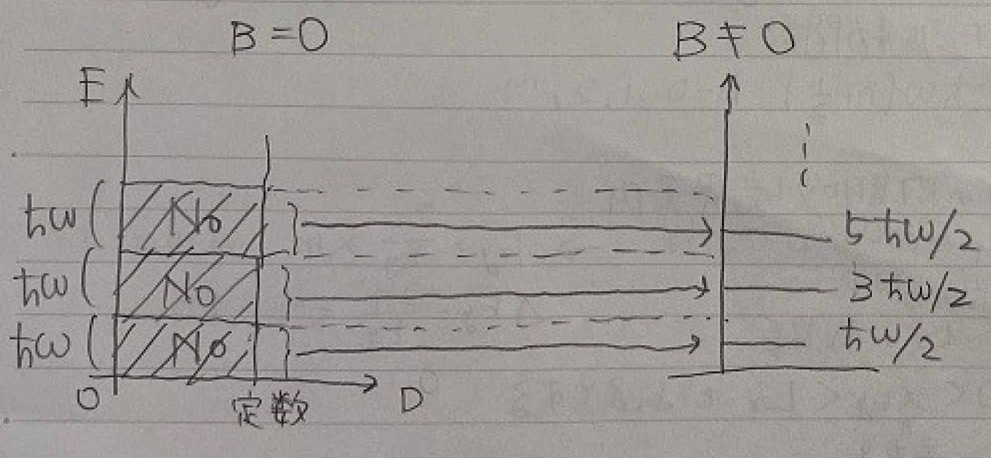
$D(\varepsilon) = \frac{dN_\varepsilon}{d\varepsilon} = L^2\frac{m}{2\pi\hbar^2} = S\frac{m}{2\pi\hbar^2}$: 定数

→ Landau 準位間隔 $\Delta E = \hbar\omega = \hbar\frac{eB}{m}$ 内にある状態数は

$D\Delta E = S\frac{m}{2\pi\hbar^2}\hbar\frac{eB}{m} = SB\frac{e}{h} = \frac{\Phi}{\Phi_0}$, $\Phi = BS$, $\Phi_0 = \frac{h}{e}$

$= N_0$: Landau 準位の縮退度に等しい.

まとめると



Landau 準位内にあった（B=0）状態がLandau準位1つにすべて縮退する

"Landau 縮退の物理的意味"

No

Date

1次元調和振動子とエルミート多項式

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad [x, p] = i\hbar, \quad [a, a^+] = 1$$

$x = A(a + a^+)$, $p = Bi(a - a^+)$ として A, B：実

$$[x, p] = iAB\{-[a, a^+] + [a^+, a]\} = -2iAB = i\hbar$$

$$\therefore AB = -\hbar/2$$

$$H = -\frac{B^2}{2m}(a - a^+)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (a + a^+)^2$$ a^2, a^{+2} が消えるためには

$$\frac{B^2}{2m} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{\hbar}{2B}\right)^2, \quad B^4 = \frac{m^2\omega^2\hbar^2}{4}$$

$$\therefore B = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\hbar m\omega}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}l, \quad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$ ：量子化で生まれた長さスケール

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{l}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}l(a + a^+) \\ p &= \frac{1}{i\sqrt{2}}\frac{\hbar}{l}(a - a^+) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{l} + i\frac{l}{\hbar}p\right) \\ a^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{l} - i\frac{l}{\hbar}p\right) \end{aligned}\right.$$

$$H = -\frac{B^2}{2m}(-aa^+ - a^+a) + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (aa^+ + a^+a)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega}\underbrace{(2aa^+ + 2a^+a)}_{4(a^+a + 1/2)} = \hbar\omega(a^+a + 1/2) = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

真空 $|0\rangle$, $a|0\rangle = 0$ に対する波動関数を $\phi_0(x)$ とすると

$$\left(\frac{x}{l} + i\frac{l}{\hbar}p\right)\phi_0 = \left(\frac{x}{l} + i\frac{l}{\hbar}\cdot\frac{\hbar}{i}\partial_x\right)\phi_0 = \left(\frac{x}{l} + l\partial_x\right)\phi_0 = 0$$

$$\therefore \phi_0 = Ce^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{l^2}} \quad \left(\because \partial_x\phi_0 = -\frac{1}{2}\frac{2x}{l^2}\phi_0 = -\frac{x}{l^2}\phi_0\right)$$

規格化

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}dx\,|\phi_0|^2 = |C|^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\, e^{-\frac{x^2}{l^2}}, \quad x = lt^{1/2} \quad dx = \frac{1}{2}lt^{-1/2}dt$$

$$= |C|^2 2\int_0^{\infty}\frac{1}{2}l\,dt\,t^{-1/2}e^{-t}$$

$$= |C|^2 l\underbrace{\int_0^{\infty}dt\,e^{-t}t^{-1/2}}_{\Gamma(1/2)} = |C|^2\pi^{1/2}l, \quad l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$\therefore C = \left(\frac{1}{l^2\pi}\right)^{1/4} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n|0\rangle$ に対する固有状態 $\phi_n(x)$ として

$$H\phi_n = \hbar\omega(n+1/2)\phi_n$$

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\frac{x}{l} - i\frac{l}{\hbar}p\right)^n\phi_0 = C\frac{1}{\sqrt{n!}\,2^{n/2}}\left(\frac{x}{l} - l\partial_x\right)^n e^{-\frac{x^2}{2l^2}}$$

$\xi \equiv x/l$ として $\partial_\xi = l\partial_x$

任意の関数 $g(\xi)$ に対して

$$e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi)g = -\partial_\xi\left(e^{-\xi^2/2}g\right)$$

$$\boxed{e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi) = (-\partial_\xi)e^{-\xi^2/2}}$$

$$\phi_n = C\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}\underbrace{(\xi-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2/2}}$$

$$e^{\xi^2/2}e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi)(\xi-\partial_\xi)^{n-1}e^{-\xi^2/2}$$

$$= e^{\xi^2/2}(-\partial_\xi)\underbrace{e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi)^{n-1}e^{-\xi^2/2}}$$

$$e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi)(\xi-\partial_\xi)^{n-2}e^{-\xi^2/2}$$

$$= (-\partial_\xi)e^{-\xi^2/2}(\xi-\partial_\xi)^{n-2}e^{-\xi^2/2}$$

$$\vdots$$

$$e^{\xi^2/2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2/2}e^{-\xi^2/2}$$

$$\therefore \phi_n = C\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{\xi^2/2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2}$$

$$= C\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{-\xi^2/2}\underbrace{e^{\xi^2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2}}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}}e^{-\xi^2/2}H_n(\xi)$$

多項式 $\equiv H_n(\xi)$：エルミート多項式

ロドリゲスの公式（エルミート多項式に関する）

規格直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\phi_n^*(x)\phi_m(x) = \delta_{nm}$$

$$x = l\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\xi$$

$$dx = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}d\xi$$

$$= C^2\frac{1}{2^n n!}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi)$$

$$C^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}, \quad dx = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}d\xi$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,e^{-\xi^2}H_n(\xi)H_m(\xi) = 2^n n!\sqrt{\pi}\,\delta_{nm}$$

：エルミート多項式の規格直交性

まとめ

エルミート多項式

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2}(-\partial_\xi)^n e^{-\xi^2}$$ = ロドリゲスの公式

$H_0(\xi)=1$
$H_1(\xi)=2\xi$
$\vdots$

規格直交性

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = \sqrt{\pi}\, 2^n n!\, \delta_{nm}$$

1次元調和振動子

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad p = -i\hbar\partial_x$$

$$H\phi_n(x) = E_n\phi_n(x), \quad E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{2^{n/2}\sqrt{n!}} e^{-x^2/2l^2} H_n\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$ = 量子化長