

量子力学3

2018/10/8 50 後藤尾斗

電磁場中の荷電粒子の運動 (古典力学)

ローレンツ力の下での運動

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$$

Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - e\phi + e \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - e\phi(t) - e \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}(t)$$

ϕ, A : スカラ-ポテンシャルとベクトル-ポテンシャル

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \phi$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

運動方程式④はポテンシャルを用いた $(\text{rot } \mathbf{A})_i$

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = e(-\partial_i A_i - \partial_i \phi + E_{ijk} \epsilon_{ijk} B_k)$$

$$E_i = \frac{\partial \phi}{\partial r_i} - \epsilon_{ijk} B_j$$

$$= e(-\partial_i A_i - \partial_i \phi + \epsilon_{ijk} (\partial_j A_k - \partial_k A_j))$$

① ② ③ ④

一方 Euler 方程式は

$$0 = \frac{\delta L}{\delta r_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}$$

$$= -e \partial_i \phi + e \dot{r}_j \partial_j A_i - \frac{d}{dt} (m \dot{r}_i + e A_i)$$

②

③

$$-m \ddot{r}_i - e \partial_i A - e \mathbf{V} \cdot \nabla A$$

④

$$-e \dot{r}_j \partial_j A_i$$

と Newton eq. を導く。OK

$$\text{ハミルトニアンを導く. } L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - e\phi + e \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$$

まずは運動量

$$e \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m \dot{r}_i + e A_i, \quad P = m \mathbf{V} + e \mathbf{A}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{m} (P - e \mathbf{A}) : \text{速度ベクトル}$$

$$H = \dot{\mathbf{r}} \cdot P - L$$

$$= \mathbf{V} \cdot (m \mathbf{V} + e \mathbf{A}) - \left(\frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 - e\phi + e \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} \right)$$

$$= \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + e \phi$$

$$= \frac{1}{2m} (P - e \mathbf{A})^2 + e \phi$$

ゼーマン効果

一極磁場 B の下の量子系のハミルトニアンは、

ローレンツ力を導く古典系のハミルトニアンを考える。

$$H = \frac{1}{2m} (P - e \mathbf{A})^2 + e \phi$$

とする。ここでベクトル-ポテンシャル A は

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

である。

この条件を満たすベクトル-ポテンシャルとしていかゆる対称ケーピングとなる。

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} B_m \rightarrow S_{ikl}$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} B_m$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} B_m = S_{ikl} B_m = B_i$$

$$S_{ikl} \partial_l A_k, \quad A_k = E_{klm} B_m / 2$$

展開して

$$H = H_0 + H_p + H_p \quad H = \frac{e}{2m} (P - e \mathbf{A})^2 + e \phi$$

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + e \phi$$

$$H_p = -\frac{e}{2m} (P \cdot A + A \cdot P)$$

$$H_p = \frac{e^2}{2m} A^2$$

H_0 と H_p を定性的に比較する。考えられる現象の典型的な長さと A と $P = \frac{h}{a}$, $B \sim \frac{A}{a}$ と見積もれば

$$H_p/H_0 \sim \frac{e^2 A^2 / \epsilon PA}{m / m} = \frac{e A}{P} = \frac{e \phi a}{h} \sim \frac{\phi}{a}$$

$$\phi_0 = \frac{h}{a} \text{ flux quantum} \quad \phi = B a^2$$

ここで $\phi_0 = \frac{h}{e}$ は石綿素単位、中は典型的な面積を貢献石綿素である。

$$P = \frac{h}{a} \mathbf{v}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{2} \partial_i E_{ijk} B_j \rightarrow \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_j = 0 \text{ だから } P \cdot A = -\frac{1}{2} h \nabla \cdot (A \cdot P)$$

$$P \cdot A = -\frac{1}{2} h \nabla \cdot A + A \cdot P = A \cdot P$$

$$\therefore H_p = -\frac{e}{2m} A \cdot P = -\frac{e}{2m} ((B \times P) \cdot P)$$

$$= -\frac{e}{2m} (P \times P) \cdot B = -\frac{e}{2m} B \cdot L$$

磁場のない場合は、原子内の電子が受けける原子核からのポテンシャルは中心力であり、回転不安定であるから一般に角運動量は保存し、エネルギー単位ごとに束ねる

$L^2 = \frac{1}{2} l(l+1)$ に対して、エネルギー単位は $2l+1$ 重複する。磁場下の原子では磁場の効果で H_p により取り入れて考えねばならない。ここで $B \cdot L$ はスカラ-であるから仕事の方向に座標をとることなく、 B 方向に又軸をとれば、その固有状態は L の固有値ごとに $2l+1$ 個に分裂するはずである。これをゼーマン効果と呼ぶ。

$$H_p = -\mu_L \cdot B, \quad \mu_L = \frac{e h}{2m}$$

$$\therefore \langle E \rangle = \frac{h}{2m} \mu_L^2 = E_m L / M_L, \quad E_m = \frac{e h}{2m} M_L, \quad M_L = l, \dots, l$$

スピン仮説

Lがなければ、この H_P の項のみでは実際の原子の

磁場下のスパイントルの実験を説明できません

$$H'_P = -\frac{g}{2m} B \cdot (L + g_S B), \quad g \approx 2$$

$$= H_P + H_S$$

$$H_S = -\mu_p \cdot B$$

$$\mu_p = g \frac{e}{2m} B = g \mu_B B / h$$

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2m} : (Bohr 磁子)$$

の余分な角運動量 S , $S^2 = \hbar^2 (1/2 + 1)/2$,

$S = 1/2$ を導入すれば H_P が説明できます。この假想的
な角運動量をスピンと呼んだ。(スピン仮説)。

この仮説は後にディスクトによる特殊相対論と
量子力学の導入により理論的に確立されました。
なお、ここで現れた磁化の次元をもつ
量 μ_B をボルツマン子とよぶ。

Dirac 方程式

この非相対論的極限で

H_P とスピン軌道相互作用が導かれました。