

角運動量の代数

"まて"

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{p} = -i\hbar \nabla = \text{軌道角運動量}$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k$$

↓一般化

角運動量 $\vec{J} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}$ を以下の交換関係をみたす演算子とする

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

 $\vec{J} = \vec{L}$ は角運動量である。これは

$$\vec{J} \times \vec{J} = i\hbar \vec{J}$$

ともかける。

$$\begin{aligned} (\because) \epsilon_{ija} [J_i, J_j] &= \epsilon_{ija} J_i J_j - \epsilon_{jia} J_i J_j \\ &= 2\epsilon_{ija} J_i J_j \\ &= 2(\vec{J} \times \vec{J})_a \end{aligned}$$

$$i\hbar \epsilon_{ija} \epsilon_{ijk} J_k = 2i\hbar \delta_{ak} J_k = 2i\hbar J_a$$

 \vec{a}, \vec{b} を任意のc-数ベクトルとて、

$$\begin{aligned} [(\vec{a} \cdot \vec{J}), (\vec{b} \cdot \vec{J})] &= a_i b_j [J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} a_i b_j J_k \\ &= i\hbar (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{J} \end{aligned}$$

また、 $\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ は全角運動量とて、

$$[\vec{J}^2, \vec{J}] = 0$$

$$\begin{aligned} (\because) [\vec{J}^2, J_i] &= [J_j J_j, J_i] \\ &= J_j [J_j, J_i] + [J_j, J_i] J_j \\ &= i\hbar \epsilon_{jik} (J_j J_k + J_k J_j) = 0 \end{aligned}$$

ただし、 \vec{J} の各成分ごとはお互いに可換ではないので、全てを同時対角化できない。そこで通常 J_z を特別視し、 \vec{J}^2 と J_z を同時対角化することを念頭に昇降演算子を定義する。

$$J_{\pm} \equiv J_x \pm iJ_y \quad (J_{\pm}^{\dagger} = J_x \mp iJ_y)$$

逆に解けば

$$J_x = \frac{1}{2} (J_+ + J_-)$$

$$J_y = \frac{1}{2i} (J_+ - J_-)$$

これらは以下を満たす

$$[\vec{J}^2, J_{\pm}] = 0$$

$$[J_x, J_{\pm}] = \pm \hbar (J_x \pm i J_y) = \pm \hbar J_{\pm}$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$$

$$(\dots) [\vec{J}^2, J_z] = [\vec{J}^2, J_x] \pm i [\vec{J}^2, J_y] = 0$$

$$[J_z, J_{\pm}] = [J_z, J_x] \pm i [J_z, J_y] = \pm \hbar J_y \mp i (\pm \hbar J_x) = \pm \hbar (J_x \pm i J_y) = \pm \hbar J_{\pm}$$

$$[J_+, J_-] = [J_x + i J_y, J_x - i J_y] = \underbrace{-i [J_x, J_y]}_{\hbar J_z} + \underbrace{i [J_y, J_x]}_{-\hbar J_z} = 2\hbar J_z$$

昇降演算子

$$J_z |m\rangle = m\hbar |m\rangle$$

$$\langle m | J_z = m\hbar \langle m | \quad m \in \mathbb{R}, J_z = \text{Hermit}$$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm} \quad \langle m |, |m'\rangle \text{ については}$$

$$\langle m | [J_z, J_{\pm}] |m'\rangle = \underbrace{\langle m | J_z J_{\pm} |m'\rangle}_{m\hbar \langle m |} - \underbrace{\langle m | J_{\pm} J_z |m'\rangle}_{m'\hbar \langle m |}$$

$$(m - m')\hbar \langle m | J_{\pm} |m'\rangle = \pm \hbar \langle m | J_{\pm} |m'\rangle$$

$$(m - m' \mp 1) \langle m | J_{\pm} |m'\rangle = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \langle 2 | J_+ | 1 \rangle \neq 0 \\ \langle 1 | J_- | 2 \rangle \neq 0 \text{ 等} \end{array} \right)$$

$$\langle m | J_{\pm} |m'\rangle = 0, \quad m \neq m' \pm 1$$

また,

$$J_z (J_+ |m\rangle) = [J_z, J_+] |m\rangle + J_+ J_z |m\rangle = \hbar(m+1) (J_+ |m\rangle) \quad J_+ |m\rangle \propto |m+1\rangle$$

つまり J_+ は m が一つ増えた状態をつくる上昇演算子

$$J_z (J_- |m\rangle) = [J_z, J_-] |m\rangle + J_- |m\rangle m\hbar = (m-1)\hbar (J_- |m\rangle) \quad J_- |m\rangle \propto |m-1\rangle$$

J_- = 下降演算子

おわせて $J_{\pm} |m\rangle \propto |m \pm 1\rangle$

$J_{\pm} = m \pm 1$ 変化させる昇降演算子

\vec{J}^2 と J_z の同時固有状態 $|j, m\rangle$ がある。

$$\begin{cases} \vec{J}^2 |j, m\rangle = \lambda_j^{J^2} |j, m\rangle \\ J_z |j, m\rangle = \lambda_m^{J_z} |j, m\rangle \end{cases}$$

一般に Hermite op. A, B に対し $[A, B] = 0 \rightarrow$ 同時固有状態がとれる

$$A|a\rangle = a|a\rangle, A|a'\rangle = a'|a'\rangle \quad a \neq a' \quad a, a' \in \mathbb{R}$$

$$\langle a|A = a^* \langle a| = a' \langle a|$$

$$0 = \langle a|[A, B]|a\rangle = \underbrace{\langle a|AB|a\rangle}_{a^* \langle a|} - \underbrace{\langle a|BA|a\rangle}_{a|a\rangle}$$

$$= (a' - a) \langle a|B|a\rangle \quad \text{異なる固有値 } a, a' \text{ に関する}$$

$$a' \neq a \text{ より } \langle a|B|a\rangle = 0 \quad \leftarrow \text{異なる固有値 } a, a' \text{ に関する } B \text{ の行列要素は } 0$$

A の異なる固有値 a_1, a_2, \dots , 固有状態 $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots$ とすると.

もし A に縮退がなければ,

$$\begin{pmatrix} \langle a_1| \\ \langle a_2| \\ \vdots \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} |a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1|B|a_1\rangle & \langle a_1|B|a_2\rangle & \dots \\ \langle a_2|B|a_1\rangle & \langle a_2|B|a_2\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} *$$

$$= \begin{pmatrix} \langle a_1|B|a_1\rangle & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \langle a_2|B|a_2\rangle & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \langle a_3|B|a_3\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

\rightarrow 対角化されている ($|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots$ を基底とすればよい)

A の固有値 a_j に縮退があれば一般の場合

$$* = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \begin{matrix}) a_1 \\) a_2 \\) a_3 \end{matrix}$$

とブロック対角化されている \rightarrow ブロックごとの基底変換することを考える
例としては a_j の重に縮退しているとする

$$|a_j^1\rangle, \dots, |a_j^n\rangle$$

$$*_j = \begin{pmatrix} \langle a_j^1|B|a_j^1\rangle & \langle a_j^1|B|a_j^2\rangle & \dots \\ \langle a_j^2|B|a_j^1\rangle & \langle a_j^2|B|a_j^2\rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \langle a_j^n|B|a_j^1\rangle & \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow \text{Hermite 行列}$$

(対角化可能)

\Rightarrow これを対角化すればよい

一般の角運動量演算子の内積

$$\vec{J} \cdot \vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_-^2 + J_- J_+^2) + J_z^1 J_z^2$$

$$\begin{aligned} (\because) \vec{J} \cdot \vec{J}^2 &= J_x^1 J_x^2 + J_y^1 J_y^2 + J_z^1 J_z^2 \\ &= \frac{1}{4} (J_+^1 + J_-^1) (J_+^2 + J_-^2) - \frac{1}{4} (J_+^1 - J_-^1) (J_+^2 - J_-^2) + J_z^1 J_z^2 \\ &= \frac{1}{2} (J_+^1 J_-^2 + J_-^1 J_+^2) + J_z^1 J_z^2 \end{aligned}$$

$$\vec{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z \text{ より}$$

$$J_z \hbar = \frac{1}{2} (J_+ J_- - J_- J_+)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 + J_z \hbar &= J_+ J_- + J_z^2 \\ J_+ J_- &= \vec{J}^2 - J_z^2 + J_z \hbar \\ &= \vec{J}^2 - J_z (J_z - \hbar) \end{aligned}$$

$$\vec{J}^2 - J_z \hbar = J_- J_+ + J_z^2$$

$$J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_z (J_z + \hbar)$$

$$\therefore J_+ J_- = \vec{J}^2 - J_z (J_z - \hbar)$$

$$J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_z (J_z + \hbar)$$