2020.5.8.

・回転操作

座標演算子 $\mathbb{r}$ を考える

ユニタリ演算子 $U = e^{i(\delta\lambda/\hbar)G}$

回転操作のとき、演算子の母関数は $G = -\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}$ （パラメーター込み）

$$\delta r_i = i[-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}/\hbar, r_i] = i\delta\omega_j[r_i, L_j/\hbar]$$

$L_j = (\mathbb{r}\times\mathbb{p})_j = \varepsilon_{jkl} r_k p_l$

$$= i\delta\omega_j\varepsilon_{jkl} r_k[r_i, p_l/\hbar] = -\delta\omega_j\varepsilon_{jkl} r_k\delta_{il}$$

$[r_i, p_l] = i\hbar\delta_{il}$

$$= -\delta\omega_j\varepsilon_{jki} r_k = \varepsilon_{ikj} r_k\delta\omega_j$$

$$\Rightarrow \delta\mathbb{r} = \mathbb{r}\times\delta\boldsymbol{\omega} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{r}$$ となる

$$\delta p_i = i[-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}/\hbar, p_i] = i\delta\omega_j[-L_j/\hbar, p_i]$$

$$= -i\delta\omega_j\varepsilon_{jab}[r_a p_b, p_i]/\hbar = \delta\omega_j\varepsilon_{jab}\delta_{ai}p_b$$

$\underset{\substack{\| \\ i\hbar\delta_{ai}}}{[r_a, p_i]} p_b$

$$= \delta\omega_j\varepsilon_{jib}p_b$$

$$= -\varepsilon_{ijb}\delta\omega_j p_b = -(\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{p})_i$$

$$\Rightarrow \delta\mathbb{p} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{p}$$

$$\begin{cases} \delta\mathbb{r} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{r} \\ \delta\mathbb{p} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{p} \end{cases}$$

ここで $[L_i, L_j] = [\varepsilon_{iab} r_a p_b, \varepsilon_{jcd} r_c p_d]$

$$= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}[r_a p_b, r_c p_d]$$

$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$

$$= \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\{r_a[p_b, r_c p_d] + [r_a, r_c p_d]p_b\}$$

$$= i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\{-r_a\delta_{bc}p_d + r_c\delta_{ad}p_b\}$$

$$= -i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jbd} r_a p_d + i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jca} r_c p_b$$

$$= i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jdb} r_a p_d - i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jac} r_c p_b$$

$$= i\hbar(\delta_{ij}\delta_{ad} - \delta_{id}\delta_{aj}) r_a p_d - i\hbar(\delta_{ij}\delta_{bc} - \delta_{ic}\delta_{jb}) r_c p_b$$

$$= i\hbar(\delta_{ij}(\mathbb{r}\cdot\mathbb{p}) - r_j p_i) - i\hbar(\delta_{ij}(\mathbb{r}\cdot\mathbb{p}) - r_i p_j)$$

$$= i\hbar(r_i p_j - r_j p_i)$$

一方、 $\varepsilon_{ijk} L_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kab} r_a p_b = (\delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja}) r_a p_b$

$= r_i p_j - r_j p_i$

よって $[L_i, L_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} L_k \leftarrow \begin{pmatrix} [L_x, L_y] = i\hbar L_z \\ [L_y, L_z] = i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] = i\hbar L_y \end{pmatrix}$

$\delta L_i = -i[\delta\omega\cdot\mathbb{L}/\hbar, L_i] = i\delta\omega_j [L_i, L_j/\hbar] = -\delta\omega_j\, \varepsilon_{ijk} L_k$

$= -\varepsilon_{ijk}\,\delta\omega_j L_k.$

$\Rightarrow \quad \delta\mathbb{L} = -(\delta\omega \times \mathbb{L})$

今までをまとめると

$\delta\mathbb{r} = -(\delta\omega \times \mathbb{r})$

$\delta\mathbb{P} = -(\delta\omega \times \mathbb{P})$ $\quad \mathbb{r}, \mathbb{P}, \mathbb{L}$ は全く同じ

$\delta\mathbb{L} = -(\delta\omega \times \mathbb{L})$ $\quad$ 変換則に従う!

$\Rightarrow \quad \delta\mathbb{V} = -\delta\omega \times \mathbb{V}$ となる $\mathbb{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ を

ベクトル演算子 と呼ぶ

・ベクトル演算子

回転 R に対して $\mathbb{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$ という3成分の物理量 または演算子は

$$\mathbb{V}' = \tilde{R}\,\mathbb{V} \qquad (R \in SO(3),\ \det R = 1,\ \tilde{R} = R^{-1})$$

と変換するとき、$\mathbb{V}$ をベクトル演算子と呼ぶ.

特に無限小回転に対しては $(\delta\tilde{R})_{ij} = -(\delta R)_{ij} = \varepsilon_{ijk}\,\delta\omega_k$

であるから、 $\delta V_i = (\delta\tilde{R})_{ij} V_j = \varepsilon_{ijk}\,\delta\omega_k V_j = -\varepsilon_{ikj}\,\delta\omega_k V_j$

$\delta\mathbb{V} = -(\delta\omega \times \mathbb{V}).$

$\delta\mathbb{r} = -(\delta\omega \times \mathbb{r}), \quad \delta\mathbb{P} = -(\delta\omega \times \mathbb{P}), \quad \delta\mathbb{L} = -(\delta\omega \times \mathbb{L})$

は より、$\mathbb{r}, \mathbb{P}, \mathbb{L}$ はベクトル演算子.

ここで無限小回転のユニタリ変換 $U = e^{-i\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}/\hbar}$ に対して

V_i は一般論に従い次のように変換する.

$$\delta V_i = i\left[-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}/\hbar,\ V_i\right] = -(i/\hbar)\,\delta\omega_j\,[L_j,\ V_i]$$

またベクトル演算子の定義から $\delta V_i = -\varepsilon_{ijk} V_k\,\delta\omega_j$

$\delta\omega_j$ が任意であることに注意すると、次の交換子を得る.

ベクトル演算子と角運動量との交換子 : $[L_i,\ V_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} V_k$

$$\left(\begin{aligned} -\tfrac{i}{\hbar}[L_j,V_i] &= -\varepsilon_{ijk}V_k \\ [L_j,V_i] &= -i\hbar\,\varepsilon_{ijk}V_k \\ [L_i,V_j] &= -i\hbar\,\varepsilon_{jik}V_k = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}V_k \end{aligned}\right)$$

なお. ベクトル量 $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ の内積 $\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2$ などは.

$$\delta(\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2) = (\delta\mathbb{V}_1)\cdot\mathbb{V}_2 + \mathbb{V}_1\cdot(\delta\mathbb{V}_2) = -(\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{V}_1)\cdot\mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_1\cdot(\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{V}_2)$$

$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{C} = (\mathbb{B}\times\mathbb{C})\cdot\mathbb{A}$

$$= -(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2)\cdot\delta\boldsymbol{\omega} + \delta\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2) = 0$$

となり. 変換で不変なスカラー演算子となる.

また.

$$\delta(\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2) = i\left[-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}/\hbar,\ (\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2)\right] = -i(\delta\omega_i/\hbar)\left[L_i,\ (V_1)_j(V_2)_j\right]$$

$$= -i(\delta\omega_i/\hbar)\left\{[L_i,\ (V_1)_j](V_2)_j + (V_1)_j[L_i,\ (V_2)_j]\right\}$$

$$= \delta\omega_i\,\varepsilon_{ijk}\left\{(V_1)_k(V_2)_j + (V_1)_j(V_2)_k\right\} = 0$$

よって 自由粒子系のハミルトニアン $H_0 = P^2/2m$ ← $P^2 = \mathbb{P}\cdot\mathbb{P}$

水素類似原子のハミルトニアン $H_{hyd} = H_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z}{r}$ ← $r = \sqrt{\mathbb{r}\cdot\mathbb{r}}$

3次元調和振動子のハミルトニアン $H_{osc} = H_0 + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbb{r}^2$ ← $\mathbb{r}^2 = \mathbb{r}\cdot\mathbb{r}$

スカラー演算子

などは. 回転対称性を持ち. 角運動量を保存する.