回転操作　物理量の変換則　$U = e^{i(\delta\lambda/\hbar)G} \Rightarrow \delta O = i\delta\lambda/\hbar\,[G, O]$

次に物理量の変換則を確認しておこう。まずは、座標演算子 $\mathbf{r}$ を考えよう。

$$G = -\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L} \quad (\text{パラメーター込み})$$

$$\delta r_i = i[-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}/\hbar,\ r_i] = i\delta\omega_j \underbrace{[r_i,\ L_j/\hbar]}_{\text{内積}} \qquad L_j = (\mathbf{r}\times\mathbf{p})_j$$

$$= i\delta\omega_j\varepsilon_{jkl} r_k [r_i,\ p_l/\hbar] = -\delta\omega_j \varepsilon_{jkl} r_k \delta_{il} \qquad = \varepsilon_{jkl} r_k p_l$$

$$= -\delta\omega_j\varepsilon_{jki} r_k = \varepsilon_{ikj} r_k \delta\omega_j$$

$$[r_i, p_l] = i\hbar\delta_{il}$$

つまり、$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}\times\delta\boldsymbol{\omega} = \boxed{-\delta\boldsymbol{\omega}\times \mathbf{r}}$ となる。

続いて、$\delta p_i = i[-\delta\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbb{L}/\hbar,\ p_i] = i\delta\omega_j[-L_j/\hbar,\ p_i]$

$$= -i\delta\omega_j\varepsilon_{jab}[r_a p_b,\ p_i]/\hbar = \delta\omega_j\varepsilon_{jab}\delta_{ai}p_b$$

$$= \delta\omega_j\varepsilon_{jib}p_b \qquad [r_a, p_i]p_b \quad 〃\ i\hbar\delta_{ai}$$

$$-\varepsilon_{ijb}\delta\omega_j p_b$$

$$= -(\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p})_i$$

$$\delta\mathbf{p} = \boxed{-\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p}}$$

$$\delta\mathbf{r} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$
$$\delta\mathbf{p} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{p}$$
$$\delta\mathbb{L} = -\delta\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{L}$$

ここで、$[L_i, L_j] = i\hbar(r_ip_j - r_jp_i)$

$$[L_i,L_j] = [\varepsilon_{iab} r_a p_b,\ \varepsilon_{jcb} r_c p_d] = \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcb}[r_a p_b,\ r_c p_d] = \varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\{r_a[p_b, r_cp_d] + [r_a, r_cp_d]p_b\}$$

$$= i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jcd}\{-r_a\delta_{bc}p_d + r_c\delta_{ad}p_b\} = -i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jbd}r_ap_d + i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jca}r_cp_b$$

$$= i\hbar\varepsilon_{iab}\varepsilon_{jdb}r_ap_d - i\hbar\varepsilon_{iba}\varepsilon_{jca}r_cp_b = i\hbar(\delta_{ij}\delta_{ad}-\delta_{id}\delta_{aj})r_ap_d - i\hbar(\delta_{ij}\delta_{bc}-\delta_{ic}\delta_{jb})r_cp_b$$

$$= i\hbar(\delta_{ij}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} - r_jp_i) - i\hbar(\delta_{ij}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{p} - r_ip_j) = i\hbar(r_ip_j - r_jp_i)$$

一方、 $\varepsilon_{kij}\varepsilon_{kab} = \delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja}$

$$\varepsilon_{ijk}L_k = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kab}r_a p_b = (\delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja})r_a p_b = r_i p_j - r_j p_b$$

基本的

よって、 $\boxed{[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k}$

$$\delta L_i = -i[\delta\omega\cdot L/\hbar, L_i] = i\delta\omega_j[L_i, L_j/\hbar] = -\delta\omega_j\varepsilon_{ijk}L_k$$

つまり $\delta\mathbb{L} = -\delta\omega\times\mathbb{L}$ となる。

$$\boxed{\begin{aligned}\delta\mathbb{r} &= -\delta\omega\times\mathbb{r}\\ \delta\mathbb{p} &= -\delta\omega\times\mathbb{p}\\ \delta\mathbb{L} &= -\delta\omega\times\mathbb{L}\end{aligned}}$$

$\mathbb{r}, \mathbb{p}, \mathbb{L}$は全く同じ変換則に従う! ⇒ 発想を逆にして $\delta\mathbb{V} = -\delta\omega\times\mathbb{V}$ となる

$\mathbb{V} = \begin{bmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{bmatrix}$ という演算子

物理量
"
ベクトル演算子

ベクトル演算子

一般に回転Rに対して $\mathbb{V} = \begin{pmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{pmatrix}$ という3成分の物理量(演算子)は

$$\mathbb{V}' = \tilde{R}\mathbb{V},\quad R\in SO(3),\ (\det R = 1,\ \tilde{R} = R^{-1})$$

と変換するとき、$\mathbb{V}$をベクトル演算子と呼ぶ。特に無限小回転に対しては
$(\delta\tilde{R})_{ij} = \varepsilon_{ijk}\delta\omega_k$ であるから、

$$\delta V_i = (\delta\tilde{R})_{ij}V_j = \varepsilon_{ijk}\delta\omega_k V_j = -\varepsilon_{ikj}\delta\omega_k V_j$$

$\delta V_i = -\varepsilon_{ikj}\delta\omega_k V_j$, $\delta\mathbb{V} = -\delta\omega\times\mathbb{V}$ となる。

前節までの議論から
$$\begin{cases}\delta\mathbb{r} = -\delta\omega\times\mathbb{r}\\ \delta\mathbb{p} = -\delta\omega\times\mathbb{p}\\ \delta\mathbb{L} = -\delta\omega\times\mathbb{L}\end{cases}$$

であり、$\mathbb{r}, \mathbb{p}, \mathbb{L}$ は全てベクトル演算子となる。

No.

Date

ここで、無限小回転のユニタリ変換 $U = e^{-i\delta\omega\cdot\mathbb{L}/\hbar}$ に対しては V_i は一般論に従い次のような変換する。

$$\delta V_i = i[-\delta\omega\cdot\mathbb{L}/\hbar, V_i] = -(i/\hbar)\delta\omega_j[L_j, V_i]$$

また、ベクトル演算子の定義を $\delta V_i = -\varepsilon_{ijk}V_k\delta\omega_j$ と書いて、$\underline{\delta\omega_j}$ が任意であることに注意して係数を比べて次の交換子を得る。

ベクトル演算子と角運動量との交換子

$$\boxed{[L_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k}$$

交換則 が交換子を定める！

$$\frac{1}{i\hbar}[L_j, V_i] = -\varepsilon_{ijk}V_k$$

$$[L_j, V_i] = -i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$$

$$[L_i, V_j] = -i\hbar\varepsilon_{jik}V_k = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$$

なお、ベクトル量 V_1, V_2 の内積

$\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2$ などは、

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{C} = (\mathbb{B}\times\mathbb{C})\cdot\mathbb{A}$$

$$\delta(\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2) = (\delta\mathbb{V}_1)\cdot\mathbb{V}_2 + \mathbb{V}_1\cdot(\delta\mathbb{V}_2) = -(\delta\omega\times\mathbb{V}_1)\cdot\mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_1\cdot(\delta\omega\times\mathbb{V}_2)$$

$$= -(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2)\cdot\delta\omega + \delta\omega\cdot(\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2) = 0$$

$$\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C})$$
$$-\mathbb{B}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{C})$$

となり、変換で不変なスカラー演算子となる。

なお

$$\delta(\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2) = i[-\delta\omega\cdot\mathbb{L}/\hbar, (\mathbb{V}_1\cdot\mathbb{V}_2)] = -i(\delta\omega_i/\hbar)[L_i, (V_1)_j(V_2)_j]$$

$$= -i(\delta\omega_i/\hbar)\{[L_i, (V_1)_j](V_2)_j + (V_1)_j[L_i, (V_2)_j]\}$$

$$= \delta\omega_i\varepsilon_{ijk}\{(V_1)_k(V_2)_j + (V_1)_j(V_2)_k\} = 0$$

よって、自由粒子のハミルトニアン $H_0 = \frac{\mathbb{P}^2}{2m}$、水素類似原子のハミルトニアン $H_{hyd} = H_0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z}{r}$、3次元調和振動子のハミルトニアン $H_{osc} = H_0 + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbb{r}^2$ などは、回転対称性を持ち、角運動量を保存する。

$$r = \sqrt{\mathbb{r}\cdot\mathbb{r}}$$