4/28

量子力学3

2018/0850 後藤虎斗

目的：量子力学における対称性の議論の基礎を学ぶ

自発的対称性の破れ

磁石（強磁性体）
spin（微小な磁石）が整列したもの

*物理法則：特別な方向はない ⇒ すべての方向が同等
対称性が高い

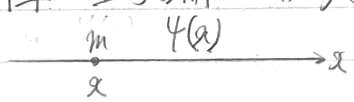
*実際に実現する現象（磁石）⇐ 特定の方向がある
対称性が低い

対称性の破れ

*自発的：磁場など他の要因なしにおきる

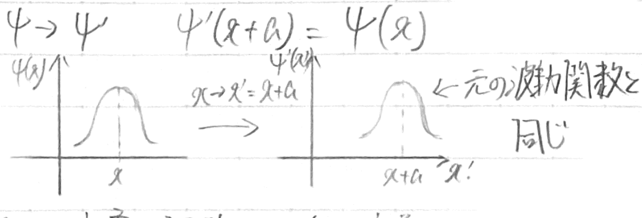
この現象は物理学の他の分野でも同様な考え方が使える ← 普遍性

第1章 量子論における対称性



一次元を運動する質点をとり、x方向にaだけ移動する操作T_aを考える。（aだけの並進 $x \to x' = x+a$）
元の波動関数を$\psi(x)$、移動させた後の波動関数を$\psi'(x)$とすると、

$T_a : \psi \to \psi'$　　$\psi'(x+a) = \psi(x)$



・$\psi'(x)$の定義：関数の並進の定義

平行移動した場所 $x+a = T_a x$ で元の波動関数の値をとる関数が平行移動したということ。

関数
function：数↦数
$x \mapsto f(x)$
演算子 operator：関数↦関数
$\psi(x) \mapsto \psi'(x)$

これを、

$$x' = T_a x = x + a \quad (T_a：対称操作)$$

微分ではない → $\psi' = T_a \psi$

$\psi'(x') = \psi(x)$ と書いて、

波動関数がx方向にaだけ平行移動することにより
$\psi \to T_a\psi$ と変換されたと考える。

テイラー展開から、

$$T_a\psi(x) = \psi'(x) = \psi(T_a^{-1}x) = \psi(x-a)$$
$$= \psi(x) - a\psi^{(1)}(x) + \frac{a^2}{2}\psi^{(2)}(x) \mp \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!}\psi^{(n)}(x)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a\partial_x)^n}{n!}\psi(x) \qquad \left(e^A = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n\right)$$
$$= e^{-a\partial_x}\psi(x)$$

となる。これは、
並進操作T_a（$\psi(x)$から$\psi'(x)$を作り出す）という演算子が

$$T_a = e^{-a\partial_x} = e^{-iaP_x/\hbar}$$

と運動量演算子 $P_x = -i\hbar\partial_x$ を用いて表現できる。
また運動量はエルミート演算子より $P_x^\dagger = P_x$ を満たすから、

$$T_a^\dagger = e^{+iaP_x^\dagger/\hbar} = e^{+iaP_x/\hbar} = T_a^{-1} \quad となり$$
$$T_a^\dagger T_a = T_a T_a^\dagger = 1 \quad \leftarrow \boxed{何もしない演算子にもどる}$$

まとめ

x方向への並進操作は演算子で書くことができる。
↳ 運動量演算子を用いて表現することができる。
↳ $T_a^\dagger T_a = T_a T_a^\dagger = 1$ の関係を満たすから
ユニタリ演算子という。

7.1.2. 物理量の変換と保存則

物理量の変換

ある対称操作に対応するユニタリ変換Uにより
波動関数が $\psi' = U\psi$ と変換するとする。

$$\psi \to \psi' = U\psi, \quad U^\dagger = U^{-1}$$

ブラケット記法を用いると

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = |U\psi\rangle \equiv U|\psi\rangle$$

一般に物理量,観測量Oはエルミート演算子であたえられ,その期待値は

$$\langle\psi|O|\psi\rangle = \int dx\, \psi^*(x)\, O\, \psi(x)$$

内積　のようになる。

$$\boxed{\text{前提: ある変換操作(対称操作)で物理量}O\text{が}O'\text{に変換するとしたとき,観測量はこの変換により不変であるとする。}\quad \langle\psi|O|\psi\rangle = \langle\psi'|O'|\psi'\rangle}$$

右辺に波動関数の変換則を使えば

$$\langle\psi|O|\psi\rangle = \langle\psi|U^\dagger O' U|\psi\rangle$$

($\because$ $\langle\psi'| = \langle\psi|U^\dagger$, $U^\dagger = U^{-1}$)

となるから

$$O = U^\dagger O' U \quad \text{つまり}$$

(左からU、右から$U^\dagger$)

$$O \to O' = UOU^{-1} \quad \text{と変換する}$$

特に

$$O \to O' = UOU^{-1} = O$$

$\boxed{UO = OU}$

という変換しても変わらない時,物理量Oは変換のもとで不変であるという。
$[O, U] = 0$ と表現できる。

無限小変換と母関数

特に$\delta\lambda$を無限小の物理量として,次の形のユニタリ変換を無限小変換という。

$$U_\lambda = e^{i\delta\lambda G/\hbar}, \quad G^\dagger = G \leftarrow \text{母関数}$$

— 無限小変換 —

$$U = e^{i\delta\lambda G/\hbar} \sim 1 + i\delta\lambda G/\hbar$$

波動関数: $\delta\psi = \psi' - \psi = i\delta\lambda G\psi/\hbar$

物理量: $\delta O = O' - O = i\delta\lambda[G, O]/\hbar$

よって $[G, O] = 0$ の時, Oは無限小変換の下で不変.

$$O' = \underbrace{(1 + i\delta\lambda G/\hbar + \cdots)}_{U}\, O\, \underbrace{(1 - i\delta\lambda G/\hbar + \cdots)}_{U^{-1}} = O + i\delta\lambda[G, O]/\hbar$$

ハミルトニアンH.　系が不変.
$\delta H = 0$, $U = e^{i\delta\lambda G/\hbar}$ に対してHが不変.
一般にシュレディンガー方程式 $i\hbar\partial_t\Psi = H\Psi$ の形式解を
$\Psi(t) = e^{-iHt/\hbar}\Psi(0)$ と書けば
Gの期待値 $\langle G\rangle_t = \langle\Psi(t)|G|\Psi(t)\rangle$ の
時間変化は　（↖時間に依存）

$$\frac{d}{dt}\langle G\rangle_t = \frac{d}{dt}\langle\Psi(0)|e^{iHt/\hbar} G e^{-iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle$$
$$= (i/\hbar)\langle\Psi(0)|e^{iHt/\hbar}[H, G]e^{-iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle G\rangle_t = \langle\partial_t\Psi(t)|G|\Psi\rangle + \langle\Psi|G|\partial_t\Psi(t)\rangle$$

(シュレディンガー方程式)
$$= -\frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|HG + \frac{1}{i\hbar}GH|\Psi\rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|(GH - HG)|\Psi\rangle$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|[G, H]|\Psi\rangle$$

よって
ハミルトニアンが無限小変換 $e^{i\delta\lambda G/\hbar}$ で不変なとき,
$[H, G] = 0$であり, $\langle G\rangle_t$ は時間に依存せず
保存量となる。

— 無限小変換と保存則 —

ハミルトニアンHが無限小変換 $e^{i\delta\lambda G/\hbar}$ の下で不変な時, $[H, G] = 0$とハミルトニアンとGは可換であり, Gは保存量となる。