物理学類 20110859 佐藤和之

NO.

DATE

力学A 演習問題6 レポート

I. I.1 多様性 1つ1つのものを考えることで

多くのデータを得て普遍性を見つけることができる。

普遍性 様々な性質をもつものを、

統一的な理解記述ができるようになる。

質点の力学の意義

多くのものを質点と考えることにより、

同じ法則が成り立つようにする。

I.2 消しゴム $m_1 a = m_1 g - k_1 v$

紙 $m_2 a = m_2 g - k_2 v$

質点とみることで 空気抵抗 ≒ 0 となる

∴ 両方 $a = g$ となり、このとき

すべての物体において Newton 方程式が成立する //

I.3 $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$

$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0$

初期条件 $\begin{cases} \vec{r} = \vec{0} \\ \vec{v} = \vec{v}_0 \end{cases}$ より $\vec{x}_0 = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t$ //

I.4 $\vec{g} = (0, 0, -g)$

$\vec{v_0} = (v_x, v_y, v_z)$

$$\therefore \vec{r} = \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_z t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

x方向、y方向
　等速直線運動
z方向
　方物線運動 //

I.5 運動が記述しやすくなる。

（ベクトルだけでは大きさと向きはあらわせるけど、具体的にどのような方向を向いているかは分からない）

I.6. 座標変換しても大きさや向きが変わらない。

I.7 言えない
座標変換をすると意味が変わってしまう

たとえば　水素 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

円柱座標変換すると

$$(\text{水素})_{r\phi z} = \tilde{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + \sin\theta \\ \cos\theta - \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$ ⇒ 意味が分からない //

NO.

DATE

Ⅱ Ⅱ.1 一般解 $= A\cos\omega t + B\sin\omega t$ より

$\ddot{x} = -\omega^2 x$ $\quad\therefore\ \omega^2 = \frac{k}{m}$

Newton eq. より $m(-\omega^2 x) = -kx$ $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ //

Ⅱ.2 $x = A\cos\omega t$ とおくと

$$W = \int_{-A}^{0} -kx\, dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{-A}^{0} = \frac{1}{2}kA^2$$ //

$$\Delta T = \frac{1}{2}m(A\omega\sin\pi)^2 - \frac{1}{2}m\left(A\omega\sin\frac{\pi}{2}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{2}kA^2 = -W$$

Ⅱ.3 $m\ddot{x} = F$

$\frac{d}{dt}m\dot{x} = F$

$\frac{d}{dt}p = F \Rightarrow$ 力積 = 運動量変化

$\Delta P = I\ (t_1 \to t_2)$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} -kx\, dt = \left[-\frac{kA}{\omega}\sin\omega t\right]_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{kA}{\omega} = A\sqrt{km}$$

$$\Delta P = -mA\omega\sin\pi + mA\omega\sin\frac{\pi}{2} = A\sqrt{km}$$

$\therefore\ \Delta P = I$ ：確認できた //

NO.

DATE

II.4 Newton eq. $m\ddot{x} = -kx - \xi\dot{x}$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \underbrace{\frac{\xi}{m}}_{\gamma}\frac{d}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}\right)x = 0$$

$z = e^{\lambda t}$ とする $(x = \mathrm{Re}\, z)$

$$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2)\, e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$\gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0$

$\gamma < 2\omega_0$

$\xi < 2\sqrt{km}$ のとき

$\lambda = \frac{-\gamma \pm \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}\, i}{2}$ となる

$\therefore z = C_+ e^{\frac{-\gamma + \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}\, i}{2}} + C_- e^{\frac{-\gamma - \sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}\, i}{2}}$

$x = \mathrm{Re}\, z = (C_+ + C_-)\, e^{-\frac{\gamma}{2}} \cos \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \gamma^2}}{2} t$

→ 減衰振動 //

$\gamma^2 - 4\omega_0^2 > 0$

$\xi > 2\sqrt{km}$ のとき

$-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} < 0$, $-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} < 0$ より

$z = \mathrm{Re}\, z = x = C_+ e^{-|\lambda_-| t} + C_- e^{-|\lambda_+| t}$

→ 過減衰 //

$\xi_0 = 2\sqrt{km}$ //

II.5 $m\ddot{x} = -kx - \xi\dot{x} + F_e\cos\Omega t$

$$\ddot{x} + \frac{\xi}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \underbrace{\frac{F_e}{m}}_{\equiv f_e}\cos\Omega t$$

特解 $z_0 = Ae^{i\Omega t}$ とする $\mathrm{Re}\, z_0 = x_0$

$$(-\Omega^2 + i\gamma\Omega + \omega_0^2)\,Ae^{i\Omega t} = f_e e^{i\Omega t}$$

$$A = \frac{f_e}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega} = \frac{f_e}{\Omega_0^2 e^{i\delta}}$$

( $\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega \equiv \underbrace{|\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega|}_{\equiv \Omega_0^2} e^{i\delta}$)

$$\therefore x_0 = \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, \frac{f_e}{\Omega_0^2} A^{i(\Omega t - \delta)}$$

$$= \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$$

斉次解の一般解は II.4より

$t \to \infty$ なら 0 になる

∴十分に時間が経過すると

$$t \to \infty \quad x = \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$$

II.6 $W = F_e\cos\Omega t\left(-\frac{f_e}{\Omega_0^2}\Omega\sin(\Omega t - \delta)\right)$

$$= -\frac{f_e^2}{m\Omega_0^2}\Omega\cos\Omega t\sin(\Omega t - \delta) \quad //$$

NO

DATE . .

III. III.1 外力の仕事率とは外力が単位時間あたり、どのぐらいへ仕事をするか //

III.2 $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$

$m\ddot{\vec{x}}\cdot\dot{\vec{x}} = \vec{F}\cdot\dot{\vec{x}}$

$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{d}{dt}K$

∴ 外力の仕事率 = 運動エネルギーの変化率

III.3 どんな時刻でも、同じ位置にあるときには、同じ大きさと向きがかかる力

III.4 $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$

$\frac{d}{dt}K = -\nabla V(\vec{r})\cdot\vec{v}$

$\int_{t_i}^{t_f}\frac{d}{dt}K\,dt = \int_{t_i}^{t_f}-\nabla V(\vec{r})\cdot\vec{v}\,dt$

$\Delta K = -\int_{t_i}^{t_f}\frac{dV}{d\vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot dt = -\Delta V$

$\Delta(K+V) = 0$

力学的エネルギー $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r})$ は一定 //

NO.

DATE

Ⅲ.4 $m\ddot{\vec{x}} = \vec{0}$

$\frac{d}{dt}m\vec{v} = \vec{0}$ ⇒ 運動量の変化は一定 //

$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{0}$

Ⅲ.5 万有引力のポテンシャル

$= -k\frac{m}{r}$

$\therefore \frac{1}{2}mv_0^2 - k\frac{m}{r_0} > 0$

$|v| > \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$ のとき

質点は遠くに飛んでいく

$|v| < \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$ のとき

中心に近づいていく

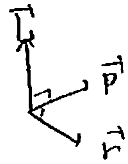
$\therefore |v_0| = \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$ //

NO.

DATE

IV　IV 1.　中心力　$\vec{F} = k\vec{r}$ となる　力: $\vec{F}$

角運動量



$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

となる $\vec{L}$

物体の回転運動の大きさをあらわす量

IV 2　Newton eqより　$m\ddot{\vec{r}} = k\vec{r}$

$$m(\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}) = k(\vec{r} \times \vec{r})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{0}$$

∴ $\vec{L}$ は定数ベクトルとなり、保存する //

IV.3　バネ　中心力　$\vec{F} = -k\vec{r}$ となる

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r}$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot m\ddot{\vec{r}} = -k\,\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}$$

$$\frac{d}{dt}K = -k\vec{r}\,'$$

$$\Delta K = -k\int_{t_i}^{t_f} \vec{r}\,' \,dt$$

$$\Delta K + k\int_{t_i}^{t_f} \vec{r}\,' \,dt = 0$$

∴ 時刻 $t_i \to t_f$ までのとき常に0になるから、

エネルギーは保存する //

IV.4　保存力　$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

つまり　$-k\frac{m}{\vec{r}^2} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = k\frac{m}{\vec{r}^2}$$

$\therefore V(\vec{r}) = -k\frac{m}{\vec{r}}$　∴ポテンシャル力である

//

NO.

DATE