力学A 演習問題6 柏葉 2011年度

— 力学A:演習問題6 — 2011年度1学期

未定義の記号は講義で用いた慣用に従って適宜解釈、定義せよ。

1. 質点の力学に関して以下の問いに答えよ。を考える。

1.1 物理学における多様性と普遍性の意味について説明し、質点の力学の意義に関して考えるところを記せ。

1.2 自由落下する物体の速度はの質量によらないといわれるが、実際に消しゴムと紙を自由落下させたときの運動を例にとりあげ、質点に関するニュートンの運動方程式の普遍性について述べよ。

1.3 一様重力下において初速度 v_0 で原点から放出された質量 m の質点の運動を座標に依存しない形で求めよ。ただし重力加速度（ベクトル）を g とせよ。

1.4 今度は[1.3]の運動を鉛直上向きを z 軸とする座標系をとり、解析せよ。

1.5 [1.3]の代わりに[1.4]のように特定の座標系をとって現象を考えることの意味を説明せよ。(運動方程式の変換性に注意せよ)

1.6 物理学におけるベクトル量とはなにか、座標変換とそのもとでの変換性に注意して説明せよ。

1.7 元素の原子番号と質量数、中性子数を3列に書いたものは、物理学におけるベクトル量といえるか、その可否を理由と共に記せ。

20111084 6

柏葉 優

No.

Date

力学A 演習問題6

1.1 物理学における多様性とは、物理学が宇宙から素粒子まであらゆる階層の物理現象をそれぞれ、各々の理論で説明できることであり、普遍性とは、情報を縮約することで得られる普遍的性質である。例えば、物体の質量のみに注目し、物体を質点で捉えることにより、物体の運動を記述できる。質点は自然界には存在しないが、物体の大きさ等、質量以外の影響を無視できる場合には、質点の力学ですべて記述可能で、計算が容易になるので、質点の仮定は価値があると言える。無視できることは無視することが重要だと私は考える。

1.2 実際に消しゴムと紙を自由落下させると、消しゴムの方が速く落ちるが、これは空気抵抗による影響であり、それを含むニュートン方程式を考えることで、やはり、消しゴムと紙で変わりなく運動を記述でき、普遍性は保たれる。

1.3 ニュートン方程式より $m\vec{a}=m\vec{g}$ $\therefore \vec{a}=\vec{g}$ 両辺2階積分して $\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{g}t^2+At+B$ (A, Bは定数)
初期条件より、$\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{g}t^2+\vec{v}_0t$

1.4
$$\begin{cases} x_x = v_{0x}t \\ x_y = v_{0y}t \\ x_z = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t \end{cases}$$

1.5 特定の座標をとることで、運動をより具体的に記述することができ、運動の性質を発見し易くなる。また、運動方程式は座標変換に対して不変であるので、各々の運動の性質をよく表した座標を選ぶことができる。

1.6 座標変換をすると、ある行列に従って変化する向きのある量

1.7 否。原子番号、質量数、中性子数はそれぞれ違うものであり、向きがなく、座標の概念がないから。

No.
Date

II. 振動現象について議論する。

II.1 1次元の質量 m の質点が、座標 x にあるとき力 $-kx$ $(k>0)$ をうけて運動している。運動の角振動数 ω を求めよ。

II.2 [II.1] の振動運動において、速度がもっとも大きいときから、速度零となるまでに外力がした仕事 W を求めよ。この W とその間の運動エネルギーの変化 ΔT との関係をのべ、具体的に確認せよ。

II.3 [II.2] の間に外力がした力積はいくらか。一般論により結果を示すとともに、定義に従い具体的に積分計算し力積をもとめ、一般論を確認せよ。

II.4 [II.1] の振動現象に速度に比例する抵抗力 $-\xi v$ が加わった場合を考える。このとき、ある ξ_0 が存在し $\xi > \xi_0$ と $\xi < \xi_0$ では運動が定性的に異なる。この ξ_0 をもとめ、どのように運動が異なるか述べよ。

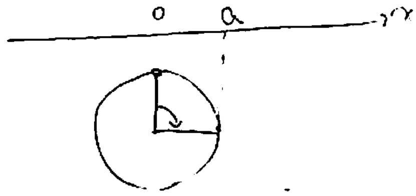
II.5 [II.4] の運動にさらに周期的な外力 $F_0 \cos \Omega t$ が働く場合の運動を外力を加えてから十分に時間が経過したときに示せ。

II.5 [II.5] 外力がする仕事率を Ω の関数として示せ。

II.1 $m\ddot{x} = -kx$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ 　特性方程式 $t^2 + \frac{k}{m} = 0$ 　$t = \sqrt{\frac{k}{m}}i$ 　$x = C\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta)$ （C, θ は定数）

よって $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$



II.2 振幅 a，最大の速さ v_{max} とする

$$W = \int_0^a -kx\,dx = -\frac{1}{2}ka^2$$

$W = \Delta T$ であり、実際に $\Delta T = 0 - \frac{1}{2}mv_{max}^2 = -\frac{1}{2}mv_{max}^2$

$v_{max} = a\omega$ より、$v_{max}^2 = a^2\omega^2 = \frac{k}{m}a^2$ から、$W = \Delta T$ となる

II.3 力積 $I = 0 - mv_{max} = -mv_{max}$ 　　$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 　$\frac{k}{m} = \omega^2$ 　$k = m\omega^2$

II.1で、$x(0) = 0$，振幅 a，角速度 ω として

$x(t) = a\sin\omega t$

$$I = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega} \times \frac{1}{4}} -kx(t) = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega} \times \frac{1}{4}} -ka\sin\omega t = ka\left[\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{\frac{1}{\omega} \times \frac{\pi}{2}} = -\frac{ka}{\omega}$$

$$= -ma\omega = -mv_{max}$$

II.4 $m\ddot{x} = -kx - \xi v$ 　　$\ddot{x} + \frac{\xi}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ 　$\frac{\xi}{m} = \alpha$，$\frac{k}{m} = \omega^2$ とおく

特性方程式：$t^2 + \alpha t + \omega^2 = 0$ 　　$\therefore t = \frac{1}{2}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}\right)$

$\alpha^2 - 4\omega^2 < 0$ すなわち $\xi < 2\sqrt{km}$ のとき

$$x = c_1 e^{\frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2})t} + c_2 e^{\frac{1}{2}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2})t} = Ce^{-\frac{\alpha}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}}{2}t + \theta\right)$$

$\alpha^2 - 4\omega^2 > 0$ すなわち $\xi > 2\sqrt{km}$ のとき

$$x = C_1' e^{\frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2})t} + C_2' e^{\frac{1}{2}(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2})t}$$

$(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2} < 0)$

よって $\xi_0 = 2\sqrt{km}$ であり、$\xi > \xi_0$ のとき 急速に減衰し、
$\xi < \xi_0$ のとき 減衰振動する

III 3次元の質点の運動を考える。

III.1 外力の仕事率とはなにか

III.1 運動エネルギー変化と外力がする仕事の関係を導け。

III.2 保存力とはなにかのべよ。

III.3 保存力のみ働く系における運動の定数を導け。

III.4 外力が働かない場合、運動の定数は [III.3] の他にもう一つ存在する。それを導け。

III.5 質量 m の質点に万有引力 $-k\frac{m}{r^2}$ が働くとき、場所 r_0 における速度 v に関して、v_0 が存在し、$|v| > v_0$ と $|v| < v_0$ とで、運動が質的に異なる。この v_0 をもとめ、質的違いを説明せよ。

No.
Date

Ⅲ.1 単位時間 外力のする仕事

Ⅲ.1 $\mathbb{F} = m\ddot{\mathbb{r}}$

$$\mathbb{F}\cdot\dot{\mathbb{r}} = m\ddot{\mathbb{r}}\,\dot{\mathbb{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbb{r}}^2\right) = \frac{dK}{dt}, \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W(t_i \to t_f) = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \mathbb{F}\cdot\dot{\mathbb{r}} = K(t_f) - K(t_i) = \Delta K$$

よって 運動エネルギー変化と外力がする仕事は等しい。

Ⅲ.2 $\mathbb{F}(t) = -\nabla V(t)$ となる $V(t)$ が存在する力

Ⅲ.3

$$W(t_i \to t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \mathbb{F}(t)\cdot\frac{d\mathbb{r}(t)}{dt}dt = -\int_{t_i}^{t_f}\nabla V\cdot\frac{d\mathbb{r}(t)}{dt}dt$$

$$= -\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt$$

$$= -\int_{t_i}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(V(\mathbb{r}(t))\right)dt = -\left(V(\mathbb{r}(t_f)) - V(\mathbb{r}(t_i))\right)$$

$V(\mathbb{r}(t_f)) = \tilde{V}(t_f)$, $V(\mathbb{r}(t_i)) = \tilde{V}(\mathbb{r}(t_i))$ とおき、$W(t_i \to t_f) = K(t_f) - K(t_i)$ より、

$$K(t_i) + V(t_i) = K(t_f) + V(t_f) = \text{運動の定数}$$

Ⅲ.4 運動量ベクトル : $\mathbb{P} = m\dot{\mathbb{r}}$ から、

$$\text{力積}\ \mathbb{I} = \int_{t_i}^{t_f} dt\,\mathbb{F}(t) = \int_{t_i}^{t_f} dt\,\frac{d\mathbb{P}}{dt} = \Delta\mathbb{P}$$

よって $F(t) = 0$ のとき $\Delta\mathbb{P} = 0$ より $\mathbb{P} = m\dot{\mathbb{r}}$ は定数

Ⅲ.5 $V = -k\frac{m}{r}$

$$-k\frac{m}{r} + \frac{1}{2}mv^2 = E(\text{一定}) \qquad \frac{1}{2}mv^2 = k\frac{m}{r} \text{ とおくと、} \quad v = \sqrt{\frac{2k}{r}} = v_0$$

$E - \left(-k\frac{m}{r}\right) = \frac{1}{2}mv^2 > 0$ $r \to \infty$ のとき $v > v_0$ ならば これを満たし、

$v < v_0$ のとき 満たさない

よって $v > v_0$ のとき 質点は無限遠まで運動するが、$v < v_0$ のときは運動の範囲が有限となる。

VI. 中心力について考える。

IV.1 中心力とはなにか、また角運動量とは何か

IV.2 中心力下での運動で角運動量が保存することを示せ。

IV.3 中心力による運動で一般にエネルギーは保存するか否か、例をあげて述べよ。

IV.4 [III.5]の万有引力は保存力である。そのポテンシャルを書き下し、ポテンシャル力であることを確認せよ。

No.

Date

IV.1　中心力：常にある一点に向かって働く力

IV.2　$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})$

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \dot{\vec{r}} \times (m\dot{\vec{r}}) + \vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}})$$

$= \vec{r} \times \vec{F}$　　$\vec{F}$が中心力のでき $\vec{F} = -k\vec{r}$　k：定数　より

$= \vec{r} \times (-k\vec{r}) = 0$　　よって $\frac{d}{dt}\vec{L} = 0$ より　角運動量は保存する

IV.3　円運動を考えると、原点からの距離が一定で、速さも一定なので、エネルギーは保存している

IV.4　$V = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{GMm\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\nabla V = \frac{GMm\,\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{GMm}{|\mathbf{r}|^2}\hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{F}$$

よって万有引力はポテンシャル力