20111084 6 相葉 優

No.
Date

力学A 演習問題5

1.1 $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = z \end{cases}$ $\vec{r} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$

$\vec{e}_r = \widehat{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$

$\boxed{\therefore\ \vec{e}_r = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}}$ //

$\vec{e}_\phi = \widehat{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right|$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right|^2 = r^2\sin^2\phi + r^2\cos^2\phi = r^2$

$\boxed{\therefore\ \vec{e}_\phi = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}}$ //

$\vec{e}_z = \widehat{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \Big/ \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right|$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right|^2 = 1$

$\boxed{\therefore\ \vec{e}_z = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ //

$$\begin{cases} \vec{e}_r \times \vec{e}_\phi = (\vec{e}_1\cos\phi + \vec{e}_2\sin\phi) \times (-\vec{e}_1\sin\phi + \vec{e}_2\cos\phi) \\ \quad = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \cos^2\phi - \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \sin^2\phi \\ \quad = \vec{e}_3\cos^2\phi + \vec{e}_3\sin^2\phi \\ \quad = \vec{e}_3 = \vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi \times \vec{e}_z = (-\vec{e}_1\sin\phi + \vec{e}_2\cos\phi) \times \vec{e}_3 \\ \quad = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \sin\phi + \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \cos\phi \\ \quad = \vec{e}_2\sin\phi + \vec{e}_1\cos\phi \\ \quad = \vec{e}_r \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_3 \times (\vec{e}_1\cos\phi + \vec{e}_2\sin\phi) \\ \quad = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \cos\phi + \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \sin\phi \\ \quad = \vec{e}_2\cos\phi - \vec{e}_1\sin\phi \\ \quad = \vec{e}_\phi \end{cases}$$

より $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ は右手系をつくる

1 円柱座標 $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$ を考える。

1.1 r, ϕ, z それぞれ、のみが増加する方向の単位ベクトル $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$ を標準的な基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を用いて書け。これらがこの順で右手系をつくることを $\vec{e}_z = \vec{e}_r \times \vec{e}_\phi$ を計算して示せ。なお $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ である。

1.2 $O = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $O_{r\phi z} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z) = OT$ となる 3×3 行列 T を求めよ。

1.3 一般のベクトル $\vec{v}$ の標準基底での成分 v と円柱座標での成分 $v_{r\phi z}$ との関係を導き、位置ベクトル $\vec{r}$ について確認せよ。

1.4 $\vec{\nabla}$ を円柱座標で表現しよう。

i. $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}$ 等を具体的に計算し $\frac{\partial}{\partial r}$ などを r, ϕ, z で表せ。ヒント：$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$ で表し、それを逆に解く。

ii. 円柱座標での $\vec{\nabla}$ の表示 $\vec{\nabla} = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$ を求めよ。

No.

Date

1.2

1.1より $$(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

よって $$T = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1.3 $$\vec{v} = O v = \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$

∴ $$v_{r\phi z} = O_{r\phi z} v = OT v = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1\cos\phi - v_2\sin\phi\\ v_1\sin\phi + v_2\cos\phi\\ v_3\end{pmatrix}$$

位置ベクトル $\mathbb{r}$ の場合

$$\mathbb{r} = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{r}' = T\mathbb{r} = \begin{pmatrix}x\cos\phi - y\sin\phi\\ x\sin\phi + y\cos\phi\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_r\\ r_\phi\\ r_z\end{pmatrix}$$

1.4 (i)

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial z}\right) = -\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$T^{-1} =$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix}\nabla_r\\ \nabla_\phi\\ \nabla_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$$

II. 中心力 $\vec{F}$ による質量 m の質点の運動を考える。

II.1 $\vec{F}$ が中心力であるとは何か述べよ。

II.2 中心力による運動では角運動量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ($\vec{p}$ は運動量) が運動の定数であることを示せ。

II.3 時刻 t において質点が yz 平面上 $(0, s, s)$, $s \neq 0$ にあり、速度ベクトルが y 軸正方向を向いているとき、保存する角運動量はどちら向きか。

II.4 $\vec{L}$ 方向に z 軸をとり円柱座標で考える。

i. 角運動量保存則を円柱座標で成分を用いて示せ。

ii. 面積一定の法則とは何か

iii. ばね定数 k のバネでつながれた質点の運動を円柱座標で議論せよ。

No.

Date

II.1 $\vec{F}$ が位置ベクトル $\vec{r}$ に平行

II.2 $\frac{d}{dt}\mathbb{L} = \frac{d}{dt}(\mathbb{r} \times \mathbb{P}) = \dot{\mathbb{r}} \times \mathbb{P} + \mathbb{r} \times \dot{\mathbb{P}} = 0$

$(\mathbb{P} = m\dot{\mathbb{r}}, \quad \mathbb{r} \parallel \dot{\mathbb{P}} = \mathbb{F})$

よって $\mathbb{L}$ は一定で、運動の定数

II.3

$\mathbb{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ s \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ s' \\ 0 \end{pmatrix} \quad s' > 0$

$\mathbb{L} = \mathbb{r} \times \mathbb{P} = mss' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって $\mathbb{L}$ の方向は $s > 0$ のとき x 軸負方向

$s < 0$ のとき x 軸正方向

II.4 (i) $\mathbb{L} = \mathbb{r} \times \mathbb{P} = m \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\dot{\phi} - \dot{r}\phi \end{pmatrix}$

$r\dot{\phi} - \dot{r}\phi$ は一定

(iii) (i)より

$r\dot{\phi} - \dot{r}\phi = $ 一定 ～①

$\phi\dot{z} - z\dot{\phi} = 0$ ～②

$z\dot{r} - r\dot{z} = 0$ ～③

②より $z = \frac{\phi}{\dot{\phi}}\dot{z}$ ～②'

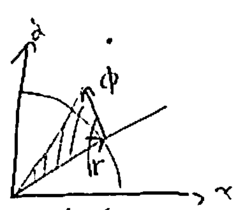
②'を③に代入 $\dot{z}\frac{\phi}{\dot{\phi}}\dot{r} - r\dot{z} = 0$

$\dot{z}(\phi\dot{r} - r\dot{\phi}) = 0$

①より $\dot{z} = 0$

③から $z\dot{r} = 0 \quad \therefore \dot{r} = 0$

よって $r\dot{\phi}$ は一定



$\dot{\phi}$：単位時間の ϕ 方向の移動距離

上図斜線部は単位時間に質点が描く面積で $r\dot{\phi}$

$r\dot{\phi}$：一定より この面積は一定となる。

No.
Date

III.5

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left(-r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial y} + 0\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$= \sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial y}$$

よって

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

両辺左側に $T^{-1} = \overline{T}$ をかけると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$$= T\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

$\vec{\nabla}$もTによって変換されるので、極座標において $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}$

III. 極座標 $x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$ を考える。

III.1 全空間を表現するために必要な r,θ,ϕ の取り得る値は何か。

III.2 r,θ,ϕ それぞれ、のみが増加する方向の単位ベクトル $\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\phi$ を標準的な基底 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ を用いて書け。これらがこの順で右手系をつくることを $\vec{e}_\phi = \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$ を計算して示せ。

III.3 $O = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $O_{r\theta\phi} = (\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\phi) = OT$ となる 3×3 行列 T を求めよ。

III.4 一般のベクトル $\vec{v}$ の標準基底での成分 v と極座標での成分 $v_{r\theta\phi}$ との関係を導き、位置ベクトルについて確認せよ。

III.5 極座標での ∇ の表式 $\nabla = \vec{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$ を求めよ。

No.

Date

III.1 $r:[0,\infty]$, $\theta:[0,\pi]$, $\phi,[0,2\pi]$

III.2 $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$ $\vec{r} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|^2 = \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta = 1,\ \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = 1$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ -r\sin\theta\end{pmatrix} \qquad \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|^2 = r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta = r^2,\ \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = r$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}-r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ 0\end{pmatrix} \qquad \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right|^2 = r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi = r^2\sin^2\theta \quad \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right| = r\sin\theta$$

よって $e_r = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\end{pmatrix}$, $e_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\end{pmatrix}$, $e_\phi = \begin{pmatrix}-\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0\end{pmatrix}$

$$e_r \times e_\theta = \begin{pmatrix}-\sin^2\theta\sin\phi - \cos^2\theta\sin\phi \\ \cos^2\theta\cos\phi + \sin^2\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\sin\phi\cos\theta\cos\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0\end{pmatrix} = e_\phi$$

$A_1\ A_2\ A_3\ A_1$

$B_1\ B_2\ B_3\ B_4$

$$e_\theta \times e_\phi = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos^2\phi + \cos\theta\sin^2\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\end{pmatrix} = e_r$$

$$e_\phi \times e_r = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\sin^2\phi - \sin\theta\cos^2\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta\end{pmatrix} = e_\theta$$

よって $\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\phi$ がこの順で右手系を作る

III.3 $$(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\phi) = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

III.4 $$v_{r\theta z} = O_{r\theta z}v = OTv = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1 \\ v_2 \\ v_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}v_1\sin\theta\cos\phi & v_2\cos\theta\cos\phi & -v_3\sin\phi \\ v_1\sin\theta\sin\phi & v_2\cos\theta\sin\phi & v_3\cos\phi \\ v_1\cos\theta & -v_2\sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

位置ベクトル $\mathbb{r}$ の場合

$\mathbb{r} = \begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}$

$$\mathbb{r}' = T\mathbb{r} = \begin{pmatrix}x\sin\theta\cos\phi & y\cos\theta\cos\phi & -z\sin\phi \\ x\sin\theta\sin\phi & y\cos\theta\sin\phi & z\cos\phi \\ x\cos\theta & -y\sin\theta & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r_r \\ r_\theta \\ r_\phi\end{pmatrix}$$

VI. x, y, z の間の関数関係を $x = x(y, z)$, $y = y(z, x)$, $z = z(x, y)$ としたとき，例えば y を一定としたときの偏微分を $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ などと書こう。

IV.1 $\delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \delta y$ から $\delta z = 0$ として，以下の関係式を導け

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$$

IV.2 IV.1で $\delta x = 0$ とすればどんな関係式が導かれるか？

IV.3 以下の関係式を導け

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

V. 東京（北緯θ度付近）における質点の自由落下を解析しよう。

V.1 $\vec{g}$ を重力加速度ベクトルとして質量 m の質点の運動方程式 $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$ を座標によらない形で解け。

V.2 この東京での自由落下を東京と同じ経度である赤道上の点での座標系（xy 平面を水平面，x 軸を地球の自転方向に，z 軸を天井方向）としたもので成分を用いて解析せよ。

No.

Date

IV,1 与式より $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \delta y$ から，$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \delta y = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \delta x$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$$

$\delta y = 0$ より y は一定であるから. $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_y = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}$

IV.2 $\delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \delta y$

$$1 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x} = \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$$

IV.3 IV.1 , IV.2 より $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = -\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$ が成り立つ

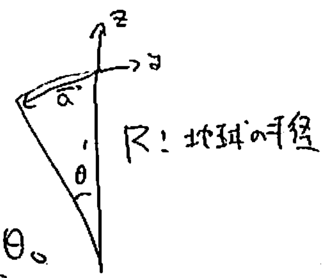
さらに $\delta y = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \delta x + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) \delta z$ に対して $\delta z = 0$ とおくことにより

$1/\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ を得る

よって $-1 = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$ となる

V,1 $\vec{r} = -\frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$ 自由落下より $\vec{v}_0 = \vec{0}$ $\therefore \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{r}_0$

V.2 $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$, 高さ $\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$ とする $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}gt^2 + h \end{pmatrix}$



x 軸を軸とする回転行列: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

原点をずらすベクトル: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\sin\theta_0 \\ -R(1-\cos\theta_0) \end{pmatrix}$ θ_0: 緯度 $\theta = -\theta_0$

$$\vec{r}' = T\vec{r} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}gt^2 + h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -R\sin\theta_0 \\ -R(1-\cos\theta_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta_0\left(\frac{1}{2}gt^2 + h - R\right) \\ \cos\theta_0\left(\frac{1}{2}gt^2 + h + R\right) - R \end{pmatrix}$$