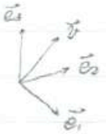
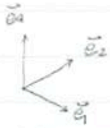
5/2 力学　　　　　　　　　　　　20110850 入舟 奈保子

ベクトル

$$\vec{v} = \vec{e_1}v_1 + \vec{e_2}v_2 + \vec{e_3}v_3$$

$$= \underbrace{(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})}_{human}\ \underbrace{v}_{見え方}$$





基底.座標系

$(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$: 不定

v : 不定

$(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ を変化させたとき どう見えるか。　座標変換

↓

$(\vec{e_1}',\vec{e_2}',\vec{e_3}') \longrightarrow v'$

規格直交系をとる。

$$\vec{e_i}\cdot\vec{e_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & それ以外 \end{cases}$$

$$\vec{e} = (\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\,e \qquad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{e_i}v_i$$

$$\vec{u} = \vec{e_j}v_j$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{e_i}v_i\cdot\vec{e_j}v_j$$

$$= \underbrace{(\vec{e_i}\cdot\vec{e_j})}_{\delta_{ij}}\,v_i v_j$$

$$= \delta_{ij}\,v_i v_j$$

$$= v_i u_j = vu$$

$(\vec{e_1}',\vec{e_2}',\vec{e_3}')$

$$\vec{e_i}' = (\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\,e_i' \qquad (e_1')(e_2')(e_3')$$

$$(\vec{e_1}',\vec{e_2}',\vec{e_3}') = (\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})\underbrace{(e_1',e_2',e_3')}_{T:\ 3\times3行列}$$

$$\vec{e_i}'\cdot\vec{e_j}' = \delta_{ij}$$

$$e_i'\cdot e_j'$$

$$\tilde{e_i}\cdot\tilde{e_j}$$

$$\tilde{T}T = \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix}(e_1',e_2',e_3')$$

$$= \begin{pmatrix} e_1'e_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = E_3 \quad 3\times3 単位行列$$

規格直交性

$$\tilde{T}T = E_3$$

$$\tilde{T} = T^{-1}$$

$$TT^{-1} = E_3$$

$$T\tilde{T}$$

直交行列

$$\vec{v} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\boxed{v}$$
$$= (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')\, v'$$
$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\boxed{Tv'}$$
$$v = Tv'$$

$\underset{\text{God}}{\vec{v}} = \underset{\text{human}}{(e_1, e_2, e_3)}\ \underset{\text{成分}}{v}$　　すべてのベクトル量の成分は、$v = Tv'$という1つのTで変換する。

Newton eq　　$F = m\alpha$　　$m = m'$ 座標変換で不変（スカラー）

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$　　$F = m\,(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,\alpha$

$F = m\alpha$ ← ある座標系でのNewton eq.

$\left.\begin{array}{l} F = TF' \\ \alpha = T\alpha' \end{array}\right)$ ベクトルの成分の変換則

$TF' = T(m\alpha')$　　T^{-1}を両辺にかけると.

$F' = m\alpha'$　　座標変換後も成立

$\underset{\text{つまり}}{\Rightarrow}$ ベクトルの成分で表現したNewton eqは座標系によらず成立

座標変換とは？

位置ベクトル　　$\vec{r}\,(= \vec{e}_1 x + \vec{e}_2 y + \vec{e}_3 z)$
$$= \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3$$

$\vec{r} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, r$　　$r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$= (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')\, r'$

$r \to r'$　　$r = Tr'$

$|r|^2 = r \cdot r = \tilde{r} r = (\widetilde{Tr'})\, Tr'$　　$(\widetilde{AB}) = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$

$= \tilde{r}' \underbrace{\tilde{T} T}_{=1} r' = \tilde{r}' r' = |r'|^2$　　長さは変化しない

回転（反転向きをかえる）

$r = Tr'$　　：回転：直交変換

$r = Tr'$　　$(r)_i = x_i = (Tr')_i = \underbrace{T_{ij} x_j'}_{}$ 行列の積

$\frac{\partial x_i}{\partial x_j'} = T_{ij}$　　$\boxed{x_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_j'} x_j'}$

一般に、$\boldsymbol{v} = T\boldsymbol{v}'$

$$(\boldsymbol{v})_i = v_i = (T\boldsymbol{v}')_i = T_{ij} v_j'$$

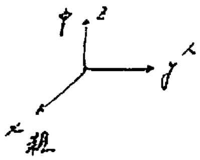
$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_j'} v_j'$$ ベクトルの変換則

$x_i \to x_i'$ 座標変換

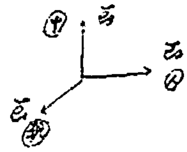
座標系の向き

$\boxed{\text{右手系}}$ と 左手系 をとって議論する

座標系が右手系とは？



$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ が右手系とは



$\boxed{\text{外積}}$ $\overset{\text{クロス}}{\times}$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$$
$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \qquad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$$

まとめて書くと、

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \qquad (*)$$

$$\vec{A} = \vec{e}_1 A_1 + \vec{e}_2 A_2 + \vec{e}_3 A_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) A$$
$$\vec{B} = \vec{e}_1 B_1 + \vec{e}_2 B_2 + \vec{e}_3 B_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) B$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk) = (1,2,3)\ (2,3,1)\ (3,1,2) \\ -1 & (1,3,2)\ (3,2,1)\ (2,1,3) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

レヴィ=チヴィタ イプシロン

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{e}_1 A_1 + \vec{e}_2 A_2 + \vec{e}_3 A_3) \times (\vec{e}_1 B_1 + \vec{e}_2 B_2 + \vec{e}_3 B_3)$$
$$= \vec{e}_3 A_1 B_2 - \vec{e}_2 A_1 B_3 - \vec{e}_3 A_2 B_1 + \vec{e}_1 A_2 B_3 + \vec{e}_2 A_3 B_1 - \vec{e}_1 A_3 B_2$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{e}_1(A_2B_3 - A_3B_2) + \vec{e}_2(A_3B_1 - A_1B_3) + \vec{e}_3(A_1B_2 - A_2B_1)$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\underbrace{\begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix}}_{A\times B}$$

(*) 確認

$$\underbrace{\varepsilon_{12k}\vec{e}_k}_{=\vec{e}_3} = \overset{0}{\varepsilon_{121}}\vec{e}_1 + \overset{0}{\varepsilon_{122}}\vec{e}_2 + \overset{1}{\varepsilon_{123}}\vec{e}_3$$

他も同じ

$$\vec{A} = \vec{e}_i A_i \qquad \vec{B} = \vec{e}_j B_j$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (\vec{e}_i A_i)\times(\vec{e}_j B_j) = \underbrace{(\vec{e}_i\times\vec{e}_j)}_{\varepsilon_{ijk}\vec{e}_k} A_i B_j$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k A_i B_j$$

$$= \vec{e}_k \cdot \varepsilon_{ijk} A_i B_j$$

$k\to i$, $i\to j$, $j\to k$ に変えてやると…

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{e}_i \underbrace{\varepsilon_{jki}}_{\varepsilon_{jki} = (-1)^2\varepsilon_{ijk}} A_j B_k$$

$$= \vec{e}_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k$$

$$= \vec{e}_i (A\times B)_i$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \quad (\ast)$$

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_1 \\ & \times & \times & \times & \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 \\ A_1B_2 - A_2B_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$, $\vec{A}\times\vec{A} = 0$

角運動量　$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$　運動量

Newton eq　$\begin{array}{c} m\dot{\vec{r}} \\ \parallel \end{array}$

$\vec{F} = m\vec{a} = \dot{\vec{p}}$　　$m\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{p}}$

両辺に $\vec{r}\times$:　$\vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\dot{\vec{p}}$

$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}\vec{r}\times\vec{p}$

$= \underbrace{\dot{\vec{r}}}_{\frac{1}{m}\vec{p}}\times\vec{p} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} = \frac{1}{m}\underbrace{\vec{p}\times\vec{p}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} = \vec{r}\times\vec{F}$

$\underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\substack{\parallel \\ \vec{N}}} = \dot{\vec{L}}$

$\vec{N}$　力のモーメント

$\vec{N} = \dot{\vec{L}}$　　角運動量の運動方程式

$(\vec{F} = \vec{p})$