2011/08/9/

物理⑩　山本 敬太

ベクトルの座標変換

ベクトルで表現される物理量
$\vec{F}$:力　$\vec{v}$:速度　$\vec{a}$:加速度

ベクトル量を基底をもって表現する。

一般のベクトル $\vec{v}$

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

と表わす。

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i\vec{e}_i = v_i\vec{e}_i$$

表現したいもの　知っているもの

で展開する。

$$\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3$$

$$= (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

行列の積法

$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,\mathbb{v} \qquad \mathbb{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2, v_3：基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ に関する vector 成分

基底ベクトル座標系 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ について $e_1\ e_2\ e_3$ が規格直交系を表す。

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1 \qquad \left(e_1 \perp e_2 \quad e_3 \perp e_1 \quad e_2 \perp e_3 \right)$$

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

クロネッカーのデルタ

規格直交系をつくる条件

$$\vec{A} = \vec{e}_1 A_1 + \vec{e}_2 A_2 + \vec{e}_3 A_3 = \vec{e}_i A_i$$

$$\vec{B} = \vec{e}_i B_i = \vec{e}_j B_j$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (\vec{e}_i \cdot A_i)\cdot(\vec{e}_j \cdot B_j)$$

$$= \vec{e}_i \cdot e_j\, A_i B_j = \delta_{ij} A_i B_j$$

$$= A_i B_i$$

$$= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

$$= \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = (A_1\ A_2\ A_3)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbb{A}}\,\mathbb{B}$$

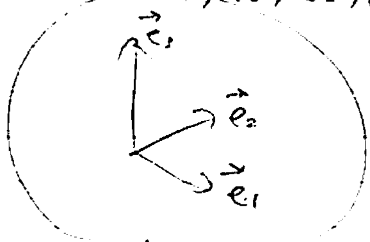
実体　ある基底をとった時の成分での計算

$$\tilde{\mathbb{A}} = {}^t\mathbb{A} = (A_1\ A_2\ A_3)$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \text{ の転置}$$

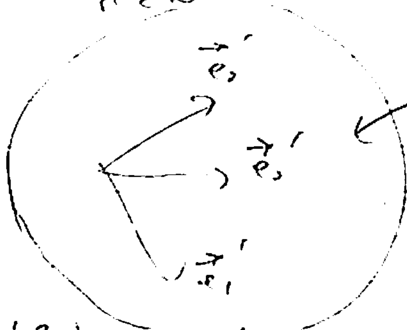
$$\vec{A} = \vec{e}_1 A_1 + \vec{e}_2 A_2 + \vec{e}_3 A_3$$

$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,\mathbb{A}$$



基底座標系
（任意に選んだ）

Aさん



こんな風に選んでも

Bさん

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \leftrightarrow (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$$

座標変換

$$\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3 \quad (\text{Aさん})$$

$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,\mathbb{v} \qquad \mathbb{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}' = \vec{e}_1{}' v_1' + \vec{e}_2{}' v_2' + \vec{e}_3{}' v_3' \quad (\text{Bさん})$$

$$= (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')\,\mathbb{v}' \qquad \mathbb{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$$

同じベクトル量 $\vec{v}$

Aさん　$\mathbb{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ と表現

Bさん　$\mathbb{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$ と表現

NO

DATE

$v \to v'$ の座標変換に伴って変化する。

$v \to v'$

$u \to u'$ と変化する。

$\vec{v} \cdot \vec{u} = v \cdot u = v' \cdot u'$

内積は座標変換に依存しない。

このような物理量をスカラーという。

↳ 質量 m など。

$\vec{F}$, $\vec{a}$: ベクトル

$\vec{F} = \vec{e}_1 F_1 + \vec{e}_2 F_2 + \vec{e}_3 F_3$

$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) F = \vec{e}_i F_i$

$\vec{a} = \vec{e}_i a_i$

$\vec{e}_1 F_1 + \vec{e}_2 F_2 + \vec{e}_3 F_3$

$= m(\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + e_3 a_3)$

e_i の係数にくらべて

$F_1 = m a_1$ 同様に $F_2 = m a_2$ $F_3 = m a_3$

まとめて考えれば $\vec{e}_i F_i = m \vec{e}_i a_i$

$\to F_i = m a_i \quad i = 1, 2, 3$

$F = ma$ 成分について

運動方程式が成立

$\vec{F}$, $\vec{a}$ は基底, 座標系

に依存するが運動方程式は,

(共変) 常に成立。

$v \to v'$ へ成分は座標変換で変化する。

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \to (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$

$\vec{e}_1' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) e_1'$

$\vec{e}_2' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) e_2'$

$\vec{e}_3' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) e_3'$

$\to (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \overbrace{(e_1', e_2', e_3')}^{3\times3\text{行列}}$

$(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) T$

T : 3×3行列

$e' = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$: e_i' の $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ での成分ベクトル

$\vec{v} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) v$

$= (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') v'$

$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) T v'$

$(v = T v')$

ベクトル成分 v, v' は,

$v = T v'$ と変換する。

$\underset{v}{\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}} = \underset{T}{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}} \underset{v'}{\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}}$

$v = T v'$: ベクトルの変換則

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: 規格直交系

$\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$: 〃

$(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) T$

$T = (e_1', e_2', e_3')$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ が規格直交系

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \in T$ をつくる3つの列 vector

e_1', e_2', e_3' が満たすべき条件

$e_i = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$

$e_i' e_j' = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = \delta_{ij} \begin{pmatrix} 1 & i = j \\ 0 & \text{それ以外} \end{pmatrix}$

$T = (e_1', e_2', e_3') = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$

$\tilde{T} T = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1' \\ \tilde{e}_2' \\ \tilde{e}_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & e_3' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underset{3\times3\text{単位行列}}{E_3}$

$v = v' \quad v = T v'$

↑

直行変換

$T : \tilde{T} T = E_3, \ \tilde{T} = T^{-1}$

直行行列

No.
Date

帰結

$v = T v'$

ベクトルである限り成分は同じTで変換

$u = T u'$

$v \cdot u = \tilde{v} \cdot u = (\widetilde{T v'}) T u'$

$= \tilde{v}' \underbrace{\tilde{T} T}_{\text{の積がユニタリーである証明}} u' = \tilde{v}' E_3 u'$

行列 A, B に対して
$\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$

$= \tilde{v}' u' = v' u'$

$\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$ について

$(A)_{ij} = A_{ij}$, $(B)_{ij} = B_{ij}$

$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} = A_{ik} B_{kj}$

$(\widetilde{AB})_{ij} = (AB)_{ji}$

$= A_{jk} B_{ki} = B_{ki} A_{jk} = (\tilde{B})_{ik} (\tilde{A})_{kj}$

$= (\tilde{B}\tilde{A})_{ij}$

$\tilde{T} T = E_3$ 直行座標 $\tilde{T} = T^{-1}$

$T T^{-1} = T \tilde{T} = E_3$

$e_1' \tilde{e}_1' + e_2' \tilde{e}_2' + e_3' \tilde{e}_3' = E_3$

e_1', e_2', e_3' の完全性

$\vec{F} = m\vec{a}$

$F = T F'$

$F = ma$ $a = T a'$ となる

$T F' = m T a'$

$F' = m a'$ T^{-1} をかけて

すべての座標系で成立