20110844 荻野孝浩

ベクトルの座標変換

ベクトルで表現される物理量

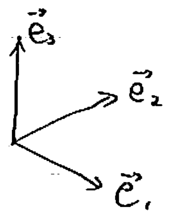
$\vec{F}$：力　$\vec{v}$：速度，$\vec{a}$：加速度

基底をとって表現する

一般のベクトル $\vec{v}$

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$ と表わす

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$：基底ベクトル



：良く知っているもの，用意してあるもの

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i\vec{e}_i = v_i\vec{e}_i$$

表現したいもの

知っているもので展開する

$$\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3$$

$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2, v_3：基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ に関するベクトルの成分

例

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot 1 + \vec{e}_2 \cdot 0 + \vec{e}_3 \cdot 0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

基底ベクトル，座標系 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

について補足，$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ が

規格直交系を成す

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$$

$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ | $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$

$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$

内積としては

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 1 \qquad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = 0$$
$$\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = |\vec{e}_2|^2 = 1 \qquad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 = 0$$
$$\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 = |\vec{e}_3|^2 = 1 \qquad \vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 = 0$$

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

↑クロネッカのデルタ

$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、$\vec{e}_3$ が規格直交系をつくる条件

$$\vec{A} = \vec{e}_1A_1 + \vec{e}_2A_2 + \vec{e}_3A_3 = \vec{e}_iA_i$$

$$\vec{B} = \vec{e}_iB_i = \vec{e}_jB_j$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (\vec{e}_iA_i)\cdot(\vec{e}_jB_j) = \underbrace{\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j}_{\delta_{ij}}A_iB_j = \delta_{ij}A_iB_j = A_jB_j = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$$

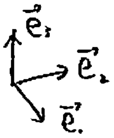
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = (A_1, A_2, A_3)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbb{A}}\mathbb{B}$$

↑実体　　↑ある基底をとったときの成分での計算

$$\tilde{\mathbb{A}} = {}^t\mathbb{A} = (A_1, A_2, A_3)$$

$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ の転置

$$\vec{A} = \vec{e}_1A_1 + \vec{e}_2A_2 + \vec{e}_3A_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\mathbb{A}$$



基底、座標系（任意に選んだ）

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \longleftrightarrow (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$$

座標変換

$\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3$ (Aさん)

$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,\mathbf{v}$ $\qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$= \vec{e}_1{}' v_1' + \vec{e}_2{}' v_2' + \vec{e}_3{}' v_3'$

$= (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')\,\mathbf{v}'$ $\qquad \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$ (Bさん)

$\boxed{\text{Aさんと Bさんは見る視点が違うと考える}}$

同じベクトル量 $\vec{v}$

Aさん $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ と表現

Bさん $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$ と表現

$\mathbf{v} \to \mathbf{v}'$ へ座標変換に伴って変化する

$\mathbf{v} \to \mathbf{v}'$
$\mathbf{u} \to \mathbf{u}'$ と変化する

$\vec{v} \cdot \vec{u} = \mathbf{v}\mathbf{u} = \mathbf{v}' \mathbf{u}'$
内積は座標変換に依存しない
このような物理量をスカラーという

スカラーの例

質量 $m = m'$

運動方程式 $\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F}$、$\vec{a}$:ベクトル

$\vec{F} = \vec{e}_1 F_1 + \vec{e}_2 F_2 + \vec{e}_3 F_3$
$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,\mathbb{F} = \vec{e}_i F_i$

$\vec{a} = \vec{e}_i a_i$

$\vec{e}_1 F_1 + \vec{e}_2 F_2 + \vec{e}_3 F_3 = m(\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3)$

$\vec{e}_1$の係数を比べて $F_1 = ma_1$、同様に $F_2 = ma_2$、$F_3 = ma_3$

まとめて考えれば $\vec{e}_i F_i = m\vec{e}_i a_i \to F_i = ma_i$ $\quad i = 1, 2, 3$

$\mathbb{F} = m\mathbb{a}$ 成分について運動方程式が成立

$\mathbb{F}$、$\mathbb{a}$は基底、座標系に依存するが、運動方程式は常に成立

(共変)

$v \to v'$ へ 成分は座標変換で変化する.

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \longrightarrow (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$

$$\vec{e}_1{}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, e_1{}'$$
$$\vec{e}_2{}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, e_2{}'$$
$$\vec{e}_3{}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, e_3{}'$$

$e_1{}' = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$ $\vec{e}_1{}'$ の $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ での成分ベクトル

$e_2{}', e_3{}'$ 〃

$$(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, \underbrace{(e_1{}', e_2{}', e_3{}')}_{3\times 3 \text{行列}}$$

$= T$

$$\vec{v} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, v$$
$$= (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')\, v'$$
$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, T v'$$

$\longrightarrow v = T v'$

$$(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, T$$

T: 3×3 行列

ベクトルの成分 v、v' は

$v = T v'$ と変換する.

$v = T v'$: ベクトルの変換則

↑

物理的なベクトル

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: 規格直交系

$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ 〃

$$(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, T$$

$$T = (e_1{}', e_2{}', e_3{}')$$

$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ が規格直交系

$$\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \delta_{ij}$$

$\quad$ 〃

$$e_i{}' \cdot e_j{}'$$

← T をつくる3つの列ベクトル $(e_1{}', e_2{}', e_3{}')$

$e_1{}', e_2{}', e_3{}'$ がみたすべき条件

No. Date . .

$$e_i' = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

$$e_i' \cdot e_j' = \tilde{e}_i' e_j' = \delta_{ij}$$

$$\tilde{e}_1' e_1' = 1 \quad \tilde{e}_1' e_2' = 0 \quad \tilde{e}_1' e_3' = 0$$
$$\tilde{e}_2' e_1' = 0 \quad \tilde{e}_2' \tilde{e}_2' = 1 \quad \tilde{e}_2' e_3' = 0$$
$$\tilde{e}_3' e_1' = 0 \quad \tilde{e}_3' e_2' = 0 \quad \tilde{e}_3' e_3' - 1$$

$$T = (e_1', e_2', e_3')$$

$$\tilde{T} T = \begin{pmatrix} \tilde{e}_1' e_1' & \tilde{e}_1' e_2' & \tilde{e}_1' e_3' \\ \tilde{e}_2' e_1' & \tilde{e}_2' e_2' & \tilde{e}_2' e_3' \\ \tilde{e}_3' e_1' & \tilde{e}_3' e_2' & \tilde{e}_3' e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

3×3 単位行列

$v \leftrightarrow v'$ $\quad v = Tv'$ ← 直交変換

T: $\tilde{T} T = E_3$ 、$\tilde{T} = T^{-1}$
直交行列

帰結

$v = Tv'$
$u = Tu'$

$\boxed{\text{行列 } A, B \text{ に対して } \widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}}$

ベクトルである限り成分は同じTで変換

$$v \cdot u = \tilde{v} u$$
$$= (\widetilde{Tv'}) Tu' = \tilde{v}' \tilde{T} T u' = \tilde{v}' E_3 u'$$
$$= \tilde{v}' u' = v' \cdot u'$$

内積がスカラーである証明

$\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$ について
$(A)_{ij} = A_{ij} \quad (B)_{ij} = B_{ij}$

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj} = A_{ik} B_{kj}$$
$$(\widetilde{AB})_{ij} = (AB)_{ji} = A_{jk} B_{ki} = B_{ki} A_{jk} = (\tilde{B})_{ik} (\tilde{A})_{kj} = (\tilde{B}\tilde{A})_{ij}$$

$\tilde{T} T = E_3$ 直交行列 $\tilde{T} = T^{-1}$ $\quad TT^{-1} = T\tilde{T} = E_3$
e_1', e_2', e_3' の完全性

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\mathbb{F} = m a \quad \mathbb{F} = T\mathbb{F}' \quad a = Ta'$ となる

$T\mathbb{F}' = mTa'$ $\quad T^{-1}$をかけて $\mathbb{F}' = ma'$ すべての座標系で成立