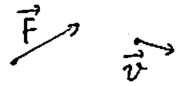
力学A 5/31 レポート　　　　　　201110853 栗木 美香.

ベクトルの座標変換

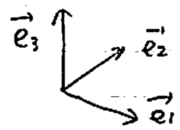
ベクトルで表現される物理量… $\vec{F}$: 力, $\vec{v}$: 速度, $\vec{a}$: 加速度.
→ ベクトル量をどう表現するか? ⇒ 基底をとって表現する.



＊一般のベクトル $\vec{v}$

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$$

と表わす.



$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: 基底ベクトル (良く知っているもの 用意してあるもの)

$$\underbrace{\vec{v}}_{\text{表現したいもの}} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i = \underbrace{v_i\vec{e}_i}_{\text{知っているもの}}$$

展開する → $\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ← [行列の乗法]

$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot \mathbb{v}$ ← $\left[\mathbb{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right]$

v_1, v_2, v_3: 基底 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ に関するベクトルの成分

例) $\vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot 1 + \vec{e}_2 \cdot 0 + \vec{e}_3 \cdot 0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \mathbb{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

※基底ベクトル, 座標系 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ について補足 ―

→ $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ が規格直交系を成す.
$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$

内積としては.

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}_1|^2 = 1$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = |\vec{e}_2|^2 = 1$, $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = |\vec{e}_3|^2 = 1$,
$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$, $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0$

$$\Rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{"クロネッカーのデルタ"}} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

← [$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ が規格直交系をつくる条件]

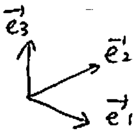
$\vec{A} = \vec{e}_1 A_1 + \vec{e}_2 A_2 + \vec{e}_3 A_3 = \vec{e}_i A_i$

$\vec{B} = \vec{e}_i B_i = \vec{e}_j B_j$

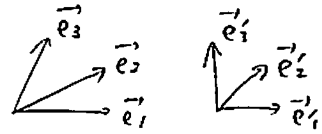
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (\vec{e}_i A_i)\cdot(\vec{e}_j B_j) = \vec{e}_i \vec{e}_j A_i B_j = \delta_{ij} A_i B_j$$
$$= A_i B_j$$
$$= A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$$

$$\underbrace{\vec{A}\cdot\vec{B}}_{\text{実体}} = \underbrace{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}_{\text{ある基底をとった時の成分での計算}} = (A_1, A_2, A_3)\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{pmatrix} = \tilde{\mathbb{A}}\mathbb{B} \qquad \tilde{\mathbb{A}} = {}^t\mathbb{A} = (A_1, A_2, A_3) \leftarrow \left[\ \mathbb{A} = \begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{pmatrix} \text{の転置}\ \right]$$

$\vec{A} = \vec{e}_1 A_1 + \vec{e}_2 A_2 + \vec{e}_3 A_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\mathbb{A}$



基底，座標系… 任意に選ぶ
(自由に決めてよい)



Aさん　　Bさん

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \longleftrightarrow (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$

座標変換

$$\vec{v} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3$$
$$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\mathbb{v} \qquad \mathbb{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$
$$= \vec{e}'_1 v'_1 + \vec{e}'_2 v'_2 + \vec{e}'_3 v'_3$$
$$= (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)\mathbb{v}' \qquad \mathbb{v}' = \begin{pmatrix}v'_1\\v'_2\\v'_3\end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ 同じベクトル量 $\vec{v}$ を，Aさんは $\mathbb{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$，Bさんは $\mathbb{v}' = \begin{pmatrix}v'_1\\v'_2\\v'_3\end{pmatrix}$ で表現.

座標変換に伴って $\mathbb{v} \to \mathbb{v}'$，$\mathbb{u} \to \mathbb{u}'$ と変化する.

※ $\vec{v}\cdot\vec{u} = \mathbb{v}\cdot\mathbb{u} = \mathbb{v}'\cdot\mathbb{u}'$ … 内積は座標変換に依存しない。
このような物理量をスカラーという。

スカラーの例) 質量 $m = m'$ … 座標を移っても変わらない.

運動方程式 $\vec{F} = m\vec{a} \leftarrow \left[\ \vec{F}, \vec{a}:\text{ベクトル} \quad \left(\begin{array}{l}\vec{F} = \vec{e}_1 F_1 + \vec{e}_2 F_2 + \vec{e}_3 F_3 \\ \quad = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\mathbb{F} = \vec{e}_i F_i \\ \vec{a} = \vec{e}_i a_i\end{array}\right)\ \right]$

$\vec{e}_1 F_1 + \vec{e}_2 F_2 + \vec{e}_3 F_3$
$= m(\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2 + \vec{e}_3 a_3)$

$\vec{e}_1$ の係数を比べて $F_1 = m a_1$，同様にして $F_2 = m a_2$，$F_3 = m a_3$

まとめると $\vec{e}_i F_i = m \vec{e}_i a_i$

$\longrightarrow F_i = m a_i \quad (i = 1, 2, 3)$

$\therefore\ \mathbb{F} = m\mathbb{a}$ … 成分について運動方程式が成立.

$\mathbb{F}$，$\mathbb{a}$ は基底，座標系に依存する(定められる)が，
運動方程式は常に成立する。(共変)

$v \to v'$ へ，成分は座標変換で変化する．

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \to (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ ← $\left[\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} : \vec{e}_1{}'$ の $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ での成分ベクトル $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \right]$

$\vec{e}_1{}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, \mathbf{e}_1$

$\vec{e}_2{}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, \mathbf{e}_2$

$\vec{e}_3{}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, \mathbf{e}_3$

$(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\underbrace{(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')}$

$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,T \quad := T : 3 \times 3$ 行列．

$\vec{v} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, v$

$= (\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')\, v'$

$= (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\, T v'$

$\Longrightarrow v = v'T \qquad \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$

→ ベクトルの成分 v, v' は $v = v'T$ と変換する．
ベクトルの変換…物理的ベクトル

・T について

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: 規格直交系
$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$: 〃

→ $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,T$

$T = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3') \quad \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$

$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ が規格直交系 $\Leftrightarrow \vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \delta_{ij}$

$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad$ 〃

$\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j'$ ← T をつくる3つの列ベクトル $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ が満たすべき条件

$\mathbf{e}_i' = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$

$\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = \widetilde{\mathbf{e}_i'}\, \mathbf{e}_j' = \delta_{ij}$

$\widetilde{\mathbf{e}_1'}\mathbf{e}_1' = 1 \quad \widetilde{\mathbf{e}_1'}\mathbf{e}_2' = 0 \quad \widetilde{\mathbf{e}_1'}\mathbf{e}_3' = 0$

$\widetilde{\mathbf{e}_2'}\mathbf{e}_1' = 0 \quad \widetilde{\mathbf{e}_2'}\mathbf{e}_2' = 1 \quad \widetilde{\mathbf{e}_2'}\mathbf{e}_3' = 0$

$\widetilde{\mathbf{e}_3'}\mathbf{e}_1' = 0 \quad \widetilde{\mathbf{e}_3'}\mathbf{e}_2' = 0 \quad \widetilde{\mathbf{e}_3'}\mathbf{e}_3' = 1.$

$T = (\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3') = \left(\mathbf{e}_1'\right)\left(\mathbf{e}_2'\right)\left(\mathbf{e}_3'\right)$

$$\widetilde{T}T = \begin{matrix} \widetilde{\mathbf{e}_1'} \\ \widetilde{\mathbf{e}_2'} \\ \widetilde{\mathbf{e}_3'} \end{matrix}\left(\mathbf{e}_1'\right)\left(\mathbf{e}_2'\right)\left(\mathbf{e}_3'\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{e}_1'}\mathbf{e}_1' & \widetilde{\mathbf{e}_2'}\mathbf{e}_1' & \widetilde{\mathbf{e}_3'}\mathbf{e}_1' \\ \widetilde{\mathbf{e}_2'}\mathbf{e}_1' & \widetilde{\mathbf{e}_2'}\mathbf{e}_2' & \widetilde{\mathbf{e}_3'}\mathbf{e}_2' \\ \widetilde{\mathbf{e}_3'}\mathbf{e}_1' & \widetilde{\mathbf{e}_2'}\mathbf{e}_3' & \widetilde{\mathbf{e}_3'}\mathbf{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 : 3\times 3 \text{ 単位行列}$$

$v \leftrightarrow v' \cdots v = Tv'$ ←［直交変換］

$T : \widetilde{T}T = E_3, \quad \widetilde{T} = T^{-1}$ ←［直交行列］

・直交行列であるとわかることの帰結

$$\mathbf{v} = T\mathbf{v}' \qquad \mathbf{u} = T\mathbf{u}'$$
⇒ベクトルである限り，成分は同じTで変換

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (\widetilde{T\mathbf{v}'})T\mathbf{u}'$$
$$= \tilde{\mathbf{v}}'\underbrace{\tilde{T}T}\mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{v}}' E_3 \mathbf{u}' = \tilde{\mathbf{v}}'\mathbf{u}' = \mathbf{v}'\cdot\mathbf{u}'$$
← [行列A, Bに対して $\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$]

内積がスカラーである証明

$\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$ について

$(A)_{ij} = A_{ij} \qquad (B)_{ij} = B_{ij}$

$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} = A_{ik}B_{kj}$

$$(\widetilde{AB})_{ij} = (AB)_{ji} = A_{jk}B_{ki} = B_{ki}A_{jk} = (\tilde{B})_{ik}(\tilde{A})_{kj}$$
$$= (\tilde{B}\tilde{A})_{ij}$$
…成立した！

$\tilde{T}T = E_3$ 　直交行列 $\tilde{T} = T^{-1}$

$$T\cdot T^{-1} = T\tilde{T} = E_3$$
$$\parallel$$
$$(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3')\begin{pmatrix}\tilde{\mathbf{e}}_1' \\ \tilde{\mathbf{e}}_2' \\ \tilde{\mathbf{e}}_3'\end{pmatrix} = \mathbf{e}_1'\tilde{\mathbf{e}}_1' + \mathbf{e}_2'\tilde{\mathbf{e}}_2' + \mathbf{e}_3'\tilde{\mathbf{e}}_3' = E_3$$

↑[$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$ の完全性]

⟶ $\vec{F} = m\vec{a}$

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ← [$\mathbf{F} = T\mathbf{F}'$, $\mathbf{a} = T\mathbf{a}'$ となる]

$T\mathbf{F}' = mT\mathbf{a}'$ 　$) \times T^{-1}$

$\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$

…T^{-1}をかけて，すべての座標系で成り立つ．