力学A 演習問題3 レポート　201110893 物理学類 吉田正樹

Date . .　No.

1.1 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ のとき

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

同様に y で偏微分 z で偏微分すると

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

1.2 $$\frac{\partial}{\partial x} r^{-1} = -r^{-2}\frac{\partial r}{\partial x} \quad (*)$$

$V(\vec{r}) = -\frac{\mu}{r}$ のとき

$$-\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \mu\left(\frac{\partial}{\partial x} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial y} r^{-1}, \frac{\partial}{\partial z} r^{-1}\right)$$

$$= -\mu r^{-2}\left(\frac{\partial}{\partial x} r, \frac{\partial}{\partial y} r, \frac{\partial}{\partial z} r\right) \quad (\because (*)より)$$

$$= -\mu r^{-2}\frac{(x, y, z)}{r} \quad (\because 1.1より)$$

$$= -\mu r^{-2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$= -\mu\frac{\hat{r}}{r^2} \quad \left(\because \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}より\right)$$

$$= -\mu\frac{\vec{r}}{r^3}$$

1.3 ポテンシャル力は $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ と表せるので

1.2より $$= -\mu\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^3} = -\mu\frac{\hat{r}}{|\vec{r}-\vec{a}|^2}$$

1.4 距離の2乗に反比例するもの 例えば クーロン力 とか 万有引力

1.5 $V_n(\vec{r}) = \mu r^n$

n=2 のとき $V(\vec{r}) = \mu r^2$

$$-\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\mu\left(\frac{\partial}{\partial x} r^2, \frac{\partial}{\partial y} r^2, \frac{\partial}{\partial z} r^2\right)$$

$$= -\mu(2x, 2y, 2z)$$

$$= -2\mu(x, y, z)$$

ポテンシャル力 $\vec{F} = -2\mu\vec{r}$　ばねの弾性力

No. Date . .

I.6 $V(\vec{r}) = \vec{\lambda}\cdot\vec{r}$ $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix}$ とおく

ポテンシャル力 $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ より

$$
\begin{aligned}
&= -\vec{\nabla}\vec{\lambda}\cdot\vec{r} \\
&= -\vec{\nabla}(C_x x + C_y y + C_z z) \\
&= -(C_x, C_y, C_z) \\
&= -\vec{\lambda}
\end{aligned}
$$

つまり一定の大きさの力がかえている力 $\vec{F}$ て逆向きに働いている状態

I.7 質点の運動エネルギーを $K = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \geq 0$ とすると

全力学的エネルギー $E = K + V(\vec{r})$

$K \geq 0$ であるので $K = E - V(\vec{r}) \geq 0$ つまり $\vec{r}$ の領域 $R = \{\vec{r} \mid E - V(\vec{r}) < 0\}$ の領域には立ち入れない

II.1 $\lim_{x\to 0} A = 0$ なら $A = o(x)$, $\lim_{x\to 0} A =$ 定数 なら $A = O(x)$

二項定理より $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k 1^{n-k} x^k$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \cdots + x^n \\
&= 1 + nx + \underbrace{x^2\left(\frac{1}{2}n(n-1) + \cdots + x^{n-2}\right)}_{\downarrow x\to 0 \quad 0}
\end{aligned}
$$

より

$(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$ また $\frac{1}{2}n(n-1) + \cdots + x^{n-2} \longrightarrow$ 定数 $(x^2 \to 0)$ より

$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2)$

II.2

$$
\begin{aligned}
\delta f &= f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) - f(x, y, z) \\
&= f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) - f(x, y+\delta y, z+\delta z) \\
&\quad + f(x, y+\delta y, z+\delta z) - f(x, y, z+\delta z) \\
&\quad + f(x, y, z+\delta z) - f(x, y, z) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\delta y + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\delta z\right)\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\delta z\right)\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\delta y\delta x + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\delta z\delta x + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\delta z\delta y\right)}_{\downarrow \delta x\to 0,\ \delta y\to 0,\ \delta z\to 0 \quad 0}
\end{aligned}
$$

より

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + O(\delta x\,\delta y\,\delta z)$$

Date . . No.

II 2の検証 $f(x,y,z)=(x+y+z)^3$ において

$$\delta f=(x+\delta x+y+\delta y+z+\delta z)^3-(x+y+z)^3$$

$$=(x+y+z)^3+3(x+y+z)^2(\delta x+\delta y+\delta z)+3(x+y+z)(\delta x+\delta y+\delta z)^2+(\delta x+\delta y+\delta z)^3-(x+y+z)^3$$

$$=3(x+y+z)^2\delta x+3(x+y+z)^2\delta y+3(x+y+z)^2\delta z+\{3(x+y+z)+(\delta x+\delta y+\delta z)\}(\delta x+\delta y+\delta z)^2$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z+O(\delta x,\delta y,\delta z)$$ となり確かに成り立つ

II 3 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ を示す

∵) $\delta f=\dfrac{\partial f}{\partial X}\delta X+\dfrac{\partial f}{\partial Y}\delta Y$, $\delta X=\dfrac{\partial X}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial X}{\partial y}\delta y$, $\delta Y=\dfrac{\partial Y}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial Y}{\partial y}\delta y$ より

$$\delta f=\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\delta y$$

この両辺を x で偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}$$

ここで x, y は それぞれ独立であるので $\dfrac{\partial y}{\partial x}=0$ より

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}$$

II 4 微量に関する関係式

$\delta f=\dfrac{\partial f}{\partial X_1}\delta X_1+\dfrac{\partial f}{\partial X_2}\delta X_2+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial X_n}\delta X_n$, $\delta X_i=\dfrac{\partial X_i}{\partial x_1}\delta x_1+\dfrac{\partial X_i}{\partial x_2}\delta x_2+\cdots+\dfrac{\partial X_i}{\partial x_m}\delta x_m$ が成り立つので

II 3より $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial X_i}\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}$ がいえ、これは x_j に関して $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=\dfrac{\partial f}{\partial X_1}\dfrac{\partial X_1}{\partial x_j}+\dfrac{\partial f}{\partial X_2}\dfrac{\partial X_2}{\partial x_j}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial X_n}\dfrac{\partial X_n}{\partial x_j}$ が成り立つので

$j=1,\ldots,m$ より これは m 個の関係式である

No. Date

$\vec{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

II5 $\because f(\vec{r}(t))$ であるので

II2より 微小量 $\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + O(\delta x, \delta y, \delta z)$

これの両辺をδtで割って $\delta t \to 0$ とすると

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \quad \cdots (*)$$

ここで $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$ より

$$\frac{df}{dt} = (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})f$$

II6 ポテンシャル力 $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V$ とおくと

Newton eqより $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$

両辺に$\vec{v}$をかけて $\vec{F}\cdot\vec{v} = m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}$

$$= m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2 = \frac{d}{dt}K$$

この両辺をt_iからt_fで積分すると

$$\int_{t_i}^{t_f}\frac{dK}{dt}dt = K(t_f) - K(t_i)$$

$$\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = -\int_{t_i}^{t_f}(\vec{\nabla}V)\vec{v}\,dt$$

$$= -\int_{t_i}^{t_f}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)dt$$

ここで II5の(*)式と比較して $\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dt}$ より

$$\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}\cdot\vec{v}\,dt = -\int_{t_i}^{t_f}\frac{dV}{dt}dt = -\{V(t_f) - V(t_i)\} = V(t_i) - V(t_f)$$

$$\therefore K(t_i) + V(t_i) = V(t_f) + K(t_f)$$

ゆえに運動の前後($t_i \to t_f$)において力学的エネルギーは等しい
つまり力学的エネルギーは保存される。