力学Aレポート　演習問題3　#201110852　工藤咲子

I. 3次元のポテンシャル力について。 $\vec{r} = {}^t(x, y, z)$

I-1. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に関して $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ を確認する。

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{r}$$

I.2. $\frac{\partial}{\partial x} r^{-1} = -r^{-2}\frac{\partial r}{\partial x}$ である。μを定数として、$V(\vec r) = -\frac{\mu}{r}$ のとき、

$$-\vec\nabla V(\vec r) = -\mu\frac{1}{r^2}\hat r = -\mu\frac{\vec r}{r^3}$$

を示す。

∵)

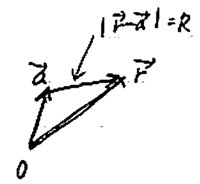
$$-\vec\nabla V(\vec r) = \begin{pmatrix}\frac{\partial V}{\partial x}\\ \frac{\partial V}{\partial y}\\ \frac{\partial V}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\mu}{r})\\ \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\mu}{r})\\ \frac{\partial}{\partial z}(-\frac{\mu}{r})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mu r^{-2}\frac{\partial r}{\partial x}\\ -\mu r^{-2}\frac{\partial r}{\partial y}\\ -\mu r^{-2}\frac{\partial r}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\mu\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}\\ -\mu\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}\\ -\mu\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}\end{pmatrix}$$

(∵)題意より。)　(∵) I.1より。)

$$= -\mu\frac{1}{r^2}\hat r = -\mu\frac{\vec r}{r^3}$$

I.3 次のポテンシャル力に対応する力を求めよ。($\vec a$:定数vector)

$$V(\vec r) = -\frac{\mu}{|\vec r - \vec a|}$$



$\vec F(\vec r) = -\vec\nabla V(\vec r)$ となるとき $\vec F$ を保存力という。

I.2より $-\vec\nabla V(\vec r) = -\mu\frac{\vec r}{r^3}$ ($V(\vec r) = -\frac{\mu}{r}$ のとき)

$R = |\vec r - \vec a|$ とおくと、$V(\vec r) = -\frac{\mu}{R}$

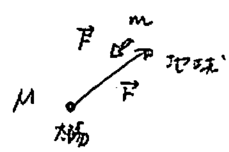
よって、$-\vec\nabla V(\vec r) = -\mu\frac{\vec R}{R^3} = -\mu\frac{\vec r - \vec a}{|\vec r - \vec a|^3}$

∴ 保存力 $\vec F = -\mu\frac{\vec r - \vec a}{|\vec r - \vec a|^3}$

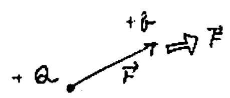
I.4 I.3の $V(\vec r)$ のポテンシャル力の例。

例) 万有引力 $\vec F = -G\frac{mM}{|\vec r|^3}\cdot\vec r$

G: 万有引力定数



例) クーロン力 $\vec F = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec r}{|\vec r|^3}$



力学Aレポート　演習問題3　#201110852　工藤咲子

I.5 $V_n(\vec{r}) = \mu r^n$, (nは整数) で与えられるポテンシャル力に対応する力F

$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ となる力Fを求める.

$$\mu\frac{\partial r^n}{\partial x} = \mu\frac{\partial}{\partial x} r^n = \mu\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,n} = \mu\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}$$
$$= \mu\frac{n}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}\cdot 2x$$
$$= \mu n x\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,n-2}$$
$$= \mu n x\cdot r^{n-2}$$

同様に $\mu\frac{\partial r^n}{\partial y} = \mu n y r^{n-2}$, $\mu\frac{\partial r^n}{\partial z} = \mu n z r^{n-2}$ となるから.

$$\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}V \\ \frac{\partial}{\partial y}V \\ \frac{\partial}{\partial z}V \end{pmatrix} = \mu n r^{n-1}\begin{pmatrix} x r^{-1} \\ y r^{-1} \\ z r^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\mu n r^{n-1}\hat{r}$$
$$= -\mu n r^{n-1}\frac{\vec{r}}{r}$$
$$= -\mu n r^{n-2}\vec{r}$$

$n=2$のとき. $\vec{F} = -\mu\cdot 2\vec{r} = -k\vec{r}$　($k=2\mu$:定数とおく)

∴ 単振動.

I-6. 次のポテンシャルに対する力を求め、物理的にどういう状況か. ($\vec{a}$:定数vector)

$V(\vec{r}) = \vec{a}\cdot\vec{r}$

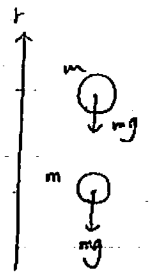
$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ とおく. (a_x, a_y, a_zは定数)

$V(\vec{r}) = \vec{a}\cdot\vec{r} = a_x x + a_y y + a_z z$

$\frac{\partial V}{\partial x} = a_x$, $\frac{\partial V}{\partial y} = a_y$, $\frac{\partial V}{\partial z} = a_z$

$$\therefore \vec{\nabla} V(\vec{r}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = {}^t\vec{a}\ (\text{定数})$$

$\vec{F} = -\vec{a}$



これは位置に関わりなく、常に同じ方向に同じ大きさの力が作用している.

例としては質点に働く重力

I.7. 一般のポテンシャル$V(\vec{r})$中の質点の運動を考える. Eを系全体の力学的エネルギーとする.

このとき、どんな初期条件の運動を考えても $\vec{r}$の領域 $R = \{\vec{r} \mid E - V(\vec{r}) < 0\}$ の領域には質点は決して立ち入らないことを示す.

∵) 運動エネルギーをKとおくと. $K \geqq 0$

題意より、 $E = V(\vec{r}) + K$

$E - V(\vec{r}) = K \geqq 0$

∴ 初期条件によらず、$\vec{r}$の領域 $R = \{\vec{r} \mid E - V(\vec{r}) < 0\}$ には質点は立ちいることはない。

力学A 演習3 #201110852 工藤咲子

II-1. $x \to 0$ のとき $\lim_{x\to 0} A = 0$ なら $A = o(x)$ と書く。
$\lim_{x\to 0} A =$ 定数なら $A = O(x)$

nが自然数のとき

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x) = 1 + nx + O(x^2)$$

を示せ

∵) 二項定理より

$$(1+x)^n = 1 + n \cdot 1^{n-1} \cdot x + {}_nC_2 1^{n-2} x^2 + \cdots + {}_nC_n \cdot x^n$$

$$= 1 + nx + O(x^2) \quad (x^2 \to 0)$$

$$= 1 + nx + O(x) \quad (x \to 0)$$

II. 2. $f(x, y, z)$ に対して 関係式

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + o(\delta x, \delta y, \delta z) \quad \cdot *$$

を説明。

(x) $f(x,y,z) = (x+y+z)^3$ のとき $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x+y+z)^2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$

$$\delta f = ((x+\delta x) + (y+\delta y) + (z+\delta z))^3 - (x+y+z)^3$$

$$= (x+\delta x+y+\delta y+z+\delta z - (x+y+z))\big(((x+\delta x)+(y+\delta y)+(z+\delta z))^2 + ((x+\delta x)+(y+\delta y)+(z+\delta z))(x+y+z) + (x+y+z)^2\big)$$

$X^3 - Y^3 = (X-Y)(X^2+XY+Y^2)$

$$= (\delta x+\delta y+\delta z)\big((x+y+z)^2 + 2(x+y+z)(\delta x+\delta y+\delta z) + (\delta x+\delta y+\delta z)^2 + (x+y+z)^2 + (x+y+z)(\delta x+\delta y+\delta z) + (x+y+z)^2\big)$$

$$= (\delta x+\delta y+\delta z)\big(3(x+y+z)^2 + 3(x+y+z)(\delta x+\delta y+\delta z) + (\delta x+\delta y+\delta z)^2\big)$$

$$= 3(x+y+z)^2(\delta x+\delta y+\delta z) + 3(x+y+z)(\delta x+\delta y+\delta z)^2 + (\delta x+\delta y+\delta z)^3$$

$$= 3(x+y+z)^2\delta x + 3(x+y+z)^2\delta y + 3(x+y+z)^2\delta z + o(\delta x, \delta y, \delta z)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + o(\delta x, \delta y, \delta z) \quad //$$

＊一般に。 $\delta f = f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) - f(x,y,z)$

$$= [f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) - f(x, y+\delta y, z+\delta z)]$$
$$+ [f(x, y+\delta y, z+\delta z) - f(x, y, z+\delta z)]$$
$$+ [f(x, y, z+\delta z) - f(x, y, z)]$$

ここで、第三項 $= \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\delta z$

第二項 $\frac{\partial f(x,y,z+\delta z)}{\partial y}\delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\delta z\right)\delta y = \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + o(\delta y \delta z)$

第一項 $= \frac{\partial f(x,y+\delta y,z+\delta z)}{\partial x}\delta x = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\delta y + \frac{\partial}{\partial x}o(\delta y \delta z)\right)\delta x \doteqdot \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + o(\delta x \delta y \delta z)$

$$\therefore \delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z + o(\delta x, \delta y, \delta z)$$

力学A 演習 レポート

#201110852 工藤咲子

II.3. 2変数関数 $f = f(X, Y)$, $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$ のとき.

$f = (X(x,y), Y(x,y))$

このとき チェーンルール: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial x}$ を示せ.

$\delta f = \dfrac{\partial f}{\partial X}\delta X + \dfrac{\partial f}{\partial Y}\delta Y$ に. $\delta X = \dfrac{\partial X}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial X}{\partial y}\delta y$; $\delta Y = \dfrac{\partial Y}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial Y}{\partial y}\delta y$ を代入.

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta y\right) + \frac{\partial f}{\partial Y}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial Y}{\partial y}\delta y\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\delta y$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\delta y$$

両辺 δx でわると、

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\delta y}{\delta x}$$

$\delta x \to 0$ のとき、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} \left(+ \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}}_{\to 0} \right) \text{〃}$$

II.4 多変数関数 $f(X_i)$, $i = 1, \cdots, n$ に関して. $X_i = X_i(x_j)$, $j = 1, \cdots, m$ のとき、

$f(X_i) = f(X_i(x_j))$

II.3 のチェーンルールを適用すると.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad (\text{Einsteinの記法})$$

$j = 1, \cdots, m$ より、 m 個の関係式.

II.5. 多変数関数 $f(\vec{r})$ に関して. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ であるとき、特に

$$\frac{df}{dt} = \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} f) , \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

が得られることを確認せよ。

II.3 より、 $f = f(\vec{r}(t))$ のとき、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{df}{dt} = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\vec{\nabla} f) \text{〃}$$

力学Aレポート　演習3　＃201110852　工藤咲子

Ⅱ.6. ポテンシャル力による 3次元の運動に関する力学的エネルギー保存の法則

ポテンシャル力 $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ について.

$$\begin{aligned}
\Delta K &= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt \\
&= -\int_{t_i}^{t_f} (\vec{\nabla}V)\cdot\vec{v}\,dt \\
&= -\int_{t_i}^{t_f} \frac{dV(\vec{r}(t))}{dt}\cdot dt \qquad \leftarrow \text{Ⅱ.5より} \\
&= -V(\vec{r}(t_f)) + V(\vec{r}(t_i)) \\
&= -\Delta V
\end{aligned}$$

力学的エネルギー E とすると. $E = K + V$ より.

$$\Delta E = 0$$

∴ 力学的エネルギー保存則が成立.