201110861 柴田倖宏 DATE 11 / 5 / 31 PAGE 1

力学A レポート

3次元

ベクトル $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{F}$

$$\vec{v}_{(t)} = \dot{\vec{r}}_{(t)} = \frac{d\vec{r}_{(t)}}{dt} \qquad \vec{a}_{(t)} = \dot{\vec{v}}_{(t)} = \ddot{\vec{r}}_{(t)} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_{(t)}$$

Newton eq.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}} = m\dot{\vec{v}}$$

$\vec{p} = m\vec{v}$: 運動量ベクトル

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}p \quad -(1.1)$$

⇒ 質点の運動量が時間的に変化する割合は質点に働いている力に等しい

$\vec{F}$をtの関数として $t=t_1$で $\vec{v}=\vec{v}_1$ $t=t_2$で $\vec{v}=\vec{v}_2$として
式(1.1)を積分して

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\,\vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\dot{\vec{p}} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{I}_{(t_1,t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\vec{F}$$

$\vec{I}_{(t_1,t_2)}$: t_1→t_2に質点に働いた力積(ベクトル)

保存力，ポテンシャル力

$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ となる $V(\vec{r})$ が存在　$V(\vec{r})$: ポテンシャル　$\vec{\nabla}$: nabla, gradient grad

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{(\vec{r})} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$$

$\vec{F}_{(\vec{r})}$

場所$\vec{r}$に質点が存在する時
$\vec{F}_{(\vec{r})}$が働きなおかつ $\vec{F}_{(\vec{r})} = -\vec{\nabla}V_{(\vec{r})}$

$$\vec{\nabla} = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

i, j, k は x, y, z 方向の単位ベクトル

$$\vec{\nabla}V_{(\vec{r})} = \left(\frac{\partial}{\partial x}V, \frac{\partial}{\partial y}V, \frac{\partial}{\partial z}V\right)$$

Ex) バネ

$\vec{r}=(x,y,z)$

自然長 $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$

$$\vec{F}=-k|\vec{r}-\vec{r}_0|\cdot\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$\hat{A}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$: $\vec{A}$方向の単位ベクトル

$$\vec{F}=-k(\vec{r}-\vec{r}_0)$$
$$=-\vec{\nabla}V(\vec{r})$$ となる $V(\vec{r})$?

$V(\vec{r})=\frac{1}{2}k|\vec{r}-\vec{r}_0|^2=\frac{1}{2}k(\vec{r}-\vec{r}_0)(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{2}k(\vec{r}-\vec{r}_0)^2$ としてみる

$$V(\vec{r})=\frac{1}{2}k\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}k(x-x_0)^2=k(x-x_0)$$

同様にして

$$\frac{\partial V}{\partial y}=k(y-y_0)\qquad\frac{\partial V}{\partial z}=k(z-z_0)$$

よって $\vec{\nabla}V(\vec{r})=(k(x-x_0),\ k(y-y_0),\ k(z-z_0))=k(\vec{r}-\vec{r}_0)$

よって $\vec{F}=-k(\vec{r}-\vec{r}_0)=-\vec{\nabla}V(\vec{r})$

1次元

$F=m\dot{v}\qquad F=-\frac{d}{dx}V$

$Fv=m\dot{v}v=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2=\frac{dK}{dt}\qquad K=\frac{1}{2}mv^2$

$t=t_1$で $K=K_1$　$t=t_2$で $K=K_2$

$t_1\to t_2$で積分 $\int_{t_1}^{t_2}dt\,Fv=\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{dK}{dt}=K_2-K_1=\Delta K$

$\int_{t_1}^{t_2}Fv=\int_{t_1}^{t_2}dt\,F(x)\dot{x}(t)$

ただし $F(x)=-\frac{dV(x)}{dx}$ より

$t=t_1$で $x=x_1$　$t=t_2$で $x=x_2$ として

$$=-\int_{t_1}^{t_2}dt\frac{dV(x)}{dx(t)}\frac{dx(t)}{dt}$$

$$=-\int_{x_1}^{x_2}dV(x)=-(V(x_2)-V(x_1))=-\Delta V(x)$$

$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}(\vec{r})$ $\quad \cdot\vec{v}$ (内積する) $\quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v} = m(\dot{v}_x v_x + \dot{v}_y v_y + \dot{v}_z v_z)$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m v_x^2 + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m v_y^2 + \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m v_z^2$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{d}{dt}K \,//$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}K = \Delta K$$
$$\parallel$$
$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{v}$ — (1.2) $\vec{F}(\vec{r})$が保存力であるならば $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ であるので
式(1.2)は

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{\nabla}V(\vec{r})\cdot\vec{v}\, dt$$
$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}\right)}_{\frac{dV(\vec{r})}{dt}} \qquad (1.3)$$

$V(x,y,z)$：3変数の関数, $\vec{r} = (x, y, z)$の関数 $\quad \vec{r}$が少し変化することを考える

$$\vec{r} \to \vec{r} + \delta\vec{r} = (x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$$
になった時Vはどれだけ変化?

δx小

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \simeq f'(\delta x)$$

$\delta x \simeq f'(\delta x)$ $\qquad \delta x = f'(\delta x) + \underbrace{\cdots}_{\delta x \to 0のとき0になる}$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$V(x,y,z)$ をxだけの関数で考える.

$$\delta V = V(x+\delta x, y, z) - V(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \underbrace{\cdots\cdots}_{\delta x \to 0 \text{ で } 0 \text{ に}}$$

Vをx,yの関数と考える

$$\delta V = V(x+\delta x, y+\delta y, z) - V(x,y,z)$$

$$= \left[V(x+\delta x, y+\delta y, z) - V(x, y+\delta y, z)\right] + \left[\underbrace{V(x, y+\delta y, z) - V(x,y,z)}_{\frac{\partial V}{\partial y}\delta y}\right]$$

$$\to V(x+\delta x, y+\delta y, z) - V(x, y+\delta y, z)$$

$$= \frac{\partial V(x, y+\delta y, z)}{\partial x}\delta y$$

$$= \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\delta y)\delta x = \frac{\partial V}{\partial x} + O\delta x\delta y = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x$$

Vをx,y,zの変数とする.

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z$$

δt で割る

$$\frac{\delta V}{\delta t} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta t}$$

$\delta t \to \infty$

$$\frac{dV(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla V \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \nabla V \times \vec{v}$$

よって式(1.3)は.

$$\Delta K = -\int_{t_1}^{t_2} dt\, \nabla V \vec{v} = -\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{dV(\vec{r}(t))}{dt} = -V(r(t_2)) + V(r(t_1))$$

$$= -\Delta V \qquad (1.4)$$

$E = K + V$ 　E：力学的全エネルギー　　式(1.4)より　$\Delta E = 0$ 　(1.5)

式(1.5)より

ポテンシャル力場で運動するときには、力学的エネルギーは保存する。

力学的エネルギー $K + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r}(t))$

は運動の定数。