5/19 力学A レポート 物理学類 201110892 吉田篤志

ベクトルの大きさは

$$|\vec{r}|^2 = x^2+y^2+z^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i = x_i x_i$$

内積(ベクトルの内積)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{A}\cdot\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

↑内積

$$(\vec{A}, \vec{B}) = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$$

$$\vec{A} = (A_1 . A_2 . A_3) = {}^t\vec{A}.$$

$\vec{A}$の転置

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$, $\vec{r}(t)$;時刻tでの質点の位置ベクトル

$$= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

運動方程式

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$に関する微分方程式

($\vec{r}(t)$が未知, $\vec{F}$が与えられている時)

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m\dot{\vec{v}}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v}\,\vec{v})$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}|\vec{v}|^2 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$

$v = |\vec{v}|$: 速度 $\quad K = \frac{1}{2}mv^2$: 運動E

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}\dot{v}_1\\ \dot{v}_2\\ \dot{v}_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}\cdot\vec{v} = \dot{v}_i v_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v_i v_i \quad \left(= \frac{1}{2}(\dot{v}_i v_i + v_i \dot{v}_i)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}^2$$

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}K$$

仕事率　運動E　$K=\frac{1}{2}mv^2$ の変化率は仕事率 $\vec{F}\cdot\vec{v}$ に等しい

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

運動量ベクトルの変化率は力ベクトルに等しい

t: $t_1 \to t_2$ まで積分

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\,\vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{p}\Big|_{t_1}^{t_2} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{I}(t_1, t_2) = \Delta\vec{p}$$

$\vec{I}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt\,\vec{F}$. 力積ベクトル　($t_1 \to t_2$ に働いた力積ベクトル)

$\vec{I}(t_1, t_2)$ が同じなら $\vec{F}$ は違っても
$\Delta\vec{p}$ は等しい

保存力

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$$

$$= -\mathrm{grad}\,V(\vec{r})$$

∇: nabla
gradient

となる時 $\vec{F}$ を保存力という

$\vec{r}$: 時刻 t に
質点のある位置ベクトル

力が質点の存在する場所で決まる

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (\nabla)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

偏微分 $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x = \partial_1$

xで偏微分する.

$\frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$　　　∂ : dの仲間

多変数関数

$f(x, y, z)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\delta x}$$

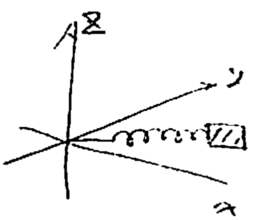
y, zは定数と考えてxで微分

ex,

$\frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$　　$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy$　　$\frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 0$

保存力の例

1. ばね



$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\vec{r}_0$: 自然長

$$\vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0) = -k \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} V \\ \frac{\partial}{\partial y} V \\ \frac{\partial}{\partial z} V \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2}k\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k(x-x_0)$$

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\mathrm{grad}\,V$$

$\vec{\nabla}$：微分演算子がついたベクトル

$$\vec{\nabla}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$$

$$\vec{F}\cdot\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}K$$

$$-\vec{\nabla}V(\vec{x})\cdot\dot{\vec{x}} = -\dot{\vec{x}}\cdot\vec{\nabla}V$$

$$= -\left\{\frac{dx}{dt}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial V}{\partial z}\right\}$$

$$= -\frac{dx_i}{dt}\cdot\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{dx_i}{dt}\partial_i V = -\dot{x}_i\partial_i V$$

→ 力学的エネルギー保存則へ