力学

物理学類
津村 康[illegible]
201110872

3次元のベクトル

位置ベクトル

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ベクトルの大きさ $|\vec{r}|$

$$|\vec{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$= \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$
$$= \sum_{i=1}^{3} x_i x_i$$
$$= x_i x_i$$

ベクトルの内積

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$
$$= \sum_{i=1}^{3} A_i B_i$$
$$= \tilde{\vec{A}} \vec{B}$$
$$= (A_1 \quad A_2 \quad A_3) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$\tilde{\vec{A}} = (A_1, A_2, A_3)$
$= {}^t\vec{A}$
$\vec{A}$の転置

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$
$$= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{r}(t)$：時刻tでの質点の位置ベクトル

運動方程式

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{r}}$$

$\vec{r} = \vec{r}(t)$に関する微分方程式
（$\vec{r}(t)$が未知，$\vec{F}$が与えられている時）

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m\dot{\vec{v}}$$
$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}$$
$$= m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$
$$= \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v})$$
$$= \frac{1}{2}m \frac{d}{dt}|\vec{v}|^2$$
$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2$$
$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2}mv^2$$

$v = |\vec{v}|$：速度
$K = \frac{1}{2}mv^2$
運動エネルギー

ホントか？

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}\dot{v}_1\\ \dot{v}_2\\ \dot{v}_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$

$$= \dot{v}_1 v_1 + \dot{v}_2 v_2 + \dot{v}_3 v_3$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v_2^2 + \frac{d}{dt}v_3^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}\cdot\vec{v} = \dot{v}_i \dot{v}_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v_i v_i \quad \left(= \frac{1}{2}(\dot{v}_i v_i + \dot{v}_i v_i)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\vec{v}^2$$

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}K$$

仕事率

運動エネルギー $K=\frac{1}{2}mv^2$ の変化率は
仕事率 $\vec{F}\cdot\vec{v}$ に等しい

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

運動量ベクトル

$$\vec{P} = \begin{pmatrix}P_1\\ P_2\\ P_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}mv_1\\ mv_2\\ mv_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}\vec{P}$$

運動量ベクトルの変化率は力ベクトルに等しい

$t : t_1 \Rightarrow t_2$ まで積分

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{\vec{P}}{dt}$$
$$= \vec{P}\Big|_{t_1}^{t_2}$$
$$= \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1)$$
$$= \Delta\vec{P}$$

$\vec{I} = (t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \vec{F}$: $t_1 \to t_2$ に働いた力積ベクトル

$\vec{I} = (t_1, t_2)$ が同じなら $\vec{F}$ は異なっても $\Delta\vec{p}$ は等しい

保存力　ポテンシャル力

$\vec{F}(t) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

$= -\mathrm{grad}\, V(\vec{r})$ となる時 $\vec{F}$ を保存力という

力が存在する場所で決まる

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (\vec{\nabla})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

偏微分　$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x = \partial_1$

x で偏微分する

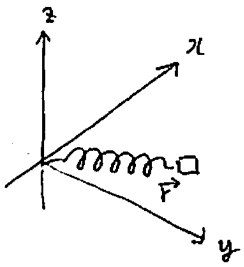
多変数関数

$f(x, y, z)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\delta x}$$

保存力の例

バネ



$\vec{r}_0$: 自然長

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0) = -k \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} V \\ \frac{\partial}{\partial y} V \\ \frac{\partial}{\partial z} V \end{pmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2} k \left\{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k(x - x_0)$$

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\mathrm{grad}\ V$$

$\vec{\nabla}$：偏微分演算子からつくったベクトル

$$(\vec{\nabla}) = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\vec{F} = m\vec{u}$$
$$\vec{F}\vec{u} = \frac{d}{dt}K$$
$$\shortparallel$$
$$-\vec{\nabla} V(\vec{r})\cdot\vec{u} = -\vec{u}\cdot\vec{\nabla} V$$
$$= \left\{\frac{dx}{dt}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial V}{\partial z}\right\}$$
$$= -\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial V}{\partial x_i}$$
$$= -\frac{dx_i}{dt}\partial_i V$$
$$\Downarrow$$

力学的エネルギー保存則