力学A

○減衰入りの強制振動

$$m\ddot{x} = F$$

$$F = \underbrace{-kx}_{\text{復元力}} \underbrace{-\xi v}_{\text{抵抗力}} + \underbrace{F_e \cos\Omega t}_{\text{外力}}$$

$$\ddot{x} = -\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x + \underbrace{\frac{F_e}{m}}_{f_e}\cos\Omega t - \underbrace{\frac{\xi}{m}}_{\gamma}\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \underbrace{f_e\cos\Omega t}_{\text{非斉次項}} \quad \text{— (1-1)}$$

$x = \mathrm{Re}\, z$ として書きかえる.

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f_e e^{i\Omega t} \quad \text{— (1-1)'}$$

(1-1)' は非斉次の微分方程式であるので一般解は斉次方程式の一般解 x_g と非斉次方程式の特解 z_0 をたしたものである.

まず斉次方程式

$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ の一般解を考える.

$z = e^{\lambda t}$ として $\quad \dot{z} = \lambda e^{\lambda t} \quad \ddot{z} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad \text{(特性方程式)}$$

$$\lambda = \lambda_\pm = \frac{1}{2}\left\{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}\right\} \quad (1\text{-}2)$$

場合わけをして考える ①抵抗が小さい時 ($\gamma < 2\omega_0$) ②抵抗が大きい時 ($\gamma > 2\omega_0$)
③ $\gamma = 2\omega_0$ (臨界減衰) の時

①. $\gamma^2 - 4\omega_0^2 = -4\omega_0'^2$ $(\gamma^2 - 4\omega_0^2 < 0)$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left\{-\gamma \pm \sqrt{-4\omega_0'^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\gamma \pm i2\omega_0'\right\} = -\frac{1}{2}\gamma \pm i\omega_0' \quad -(1\text{-}2)'$$

斉次解

$$Z = C_+e^{\lambda_+ t} + C_-e^{\lambda_- t} \quad -(1\text{-}3)$$

$$= C_+e^{-\frac{1}{2}\gamma t + i\omega_0' t} + C_-e^{-\frac{1}{2}\gamma t - i\omega_0' t}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\left\{C_+e^{i\omega_0' t} + C_-e^{-i\omega_0' t}\right\}$$

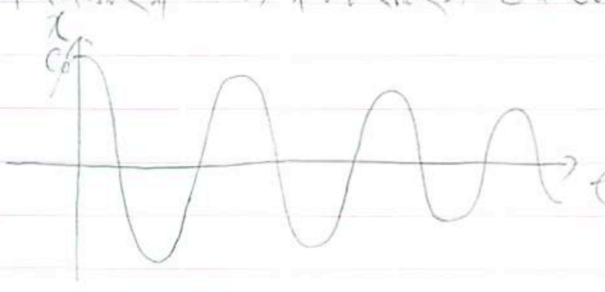
オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より

一般解

$$x = \mathrm{Re}Z = e^{-\frac{\gamma}{2}t}C_0\cos(\omega_0' t + \alpha) \quad -(1\text{-}4)$$

C_0：振幅（定数）
α：初相（位相定数）

これは 振幅が $C_0\exp(-\frac{\gamma}{2}t)$ にしたがって時間に対して指数関数的に小さくなってゆく単振動 つまり減衰振動である。



周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0'} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$

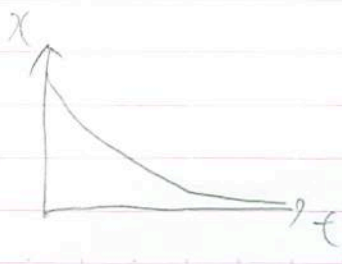
② $\gamma > 2\omega_0$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left\{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}\right\} < 0$$

一般解

$$x = \mathrm{Re}Z = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{C_+e^{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\,t} + C_-e^{-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}\,t}\right\}$$

これは振動をしない非周期運動



③ $\lambda = -\frac{\gamma}{2} = \lambda_0 = -\omega_0$ 　　$\lambda_0 < 0$.

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = \lambda^2 + 2\cdot\left(\frac{\gamma}{2}\right)\lambda + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2$$
$$= (\lambda - \lambda_0)^2$$

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)z$$
$$= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 z$$

$z = e^{\lambda t}$ としたとき

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right)e^{\lambda t} = (\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2)e^{\lambda t} \text{ より.}$$

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 e^{\lambda t} = (\lambda - \lambda_0)^2 e^{\lambda t} \xrightarrow{\lambda = \lambda_0} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 e^{\lambda_0 t} = 0$$

λで微分すると.　　　　$z = e^{\lambda_0 t}$ は斉次解

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 t e^{\lambda t} = 2(\lambda - \lambda_0)e^{\lambda t} + (\lambda - \lambda_0)^2 t e^{\lambda t}$$

$\lambda = \lambda_0$ とすると

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 t\cdot e^{\lambda_0 t} = 0.$$

$z = t\cdot e^{\lambda_0 t}$ も斉次方程式の解

一般解

$$z = C_1 e^{\lambda_0 t} + C_2 t e^{\lambda_0 t} \qquad \lambda_0 < 0.$$

$$x = \mathrm{Re}\,z = e^{\lambda_0 t}(C_1 + t\cdot C_2)$$

これも②と同様非周期運動.

①,②,③はいずれも $t \to \infty$ で $x \to 0$ である

つまり $F_e = 0$（外力なし）では振動はとまることを意味する.

外力があれば?

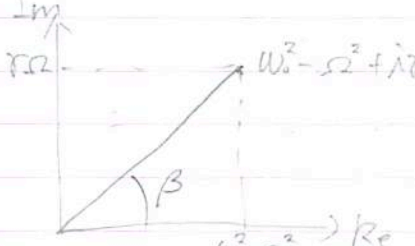
一般解 $= x_g + x_0$ 　　x_0: 特解

x_g: 斉次方程式の一般解

$(1\text{-}1)'$ で $z = Ae^{i\Omega t}$ とする

$$(-\Omega^2 + \gamma i\Omega + \omega_0^2)Ae^{i\Omega t} = f_e e^{i\Omega t}$$

$$A = \frac{f_e}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \gamma i\Omega}$$



$$\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega = \Omega_0^2 e^{i\beta} \quad \text{— } (1\text{-}5)$$

$$A = \frac{f_e}{\Omega_0^2 e^{i\beta}}$$

$$z = \frac{f_e}{\Omega_0^2} e^{i(\Omega t-\beta)} = \frac{f_e}{\Omega_0^2}\{\cos(\Omega t-\beta) + i\sin(\Omega t-\beta)\}$$

$$x_0 = \mathrm{Re}\,z = \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t-\beta)$$

一般解

$$x = x_g + \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t-\beta)$$

$$\Downarrow \quad t\to\infty$$

$$x = \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t-\beta)$$

$$v = \dot{x} = -\frac{f_e}{\Omega_0^2}\times\Omega\times)\sin(\Omega t-\beta)$$

抵抗力の行う仕事率 ($t\to\infty$で)

$$W_\xi = -\xi v\cdot v = -\xi v^2 = -\xi\left(\frac{f_e}{\Omega_0^2}\right)^2\Omega^2\underbrace{\sin^2(\Omega t-\beta)}_{=\frac{1}{2}\{1-\cos2(\Omega t-\beta)\}}$$

$-1 \leqq \cos2(\Omega t-\beta) \leqq 1$

平均して $\frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

$$\overline{W_\xi} = -\xi\left(\frac{f_e}{\Omega_0^2}\right)^2\Omega^2\cdot\frac{1}{2}$$

一方外力のする仕事率

$$W_e = F_e \cos\Omega t \times v$$
$$= F_e \cos\Omega t \cdot \left\{-\frac{f_e}{\Omega_0^2}\Omega \sin(\Omega t - \beta)\right\}$$
$$= -\frac{F_e f_e}{\Omega_0^2}\left(\cos\Omega t \sin\Omega t \cos\beta - \cos\Omega t \cos\Omega t \sin\beta\right)\cdot\Omega.$$

$-1 \le \cos\Omega t \cdot \sin\Omega t \le 1$ より　$\overline{\cos\Omega t} = \overline{\sin\Omega t} = 0.$

$0 \le \cos^2\Omega t \le 1$ より　$\overline{\cos^2\Omega t} = \frac{1}{2}$

よって　$\overline{W_e} = -\frac{F_e f_e}{\Omega_0^2}\cdot\Omega\cdot\frac{1}{2}\sin\beta$　　$F_e = m f_e.$　$\gamma m = -\xi$

(1-5)より．$e^{i\beta} = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega_0^2} + i\frac{\gamma\Omega}{\Omega_0^2}.$

オイラーの公式より　$\sin\beta = \frac{\gamma\Omega}{\Omega_0^2}$　よって

$$\overline{W_e} = \xi\left(\frac{f_e}{\Omega_0^2}\right)^2\Omega^2\cdot\frac{1}{2} = -\overline{W_\xi} \quad \text{— (1-6)}$$

(1-6)より．外力がした仕事は抵抗力が行う仕事であることがわかる.

★3次元の質点の運動

時刻tでの質点の座標$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$を定める　$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{r}(t)$　(2-1)

(2-1)より時刻tごとに$\vec{r}(t)$が定まる．これを位置ベクトルという.

速度ベクトル $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$ (2-2)　$v_x(t) = \dot{x}(t)$　$v_y(t) = \dot{y}(t)$　$v_z(t) = \dot{z}(t).$

加速度ベクトル $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$ (2-3)　$a_x(t) = \ddot{x}(t)$　$a_y(t) = \ddot{y}(t)$　$a_z(t) = \ddot{z}(t)$

$x = x_1, y = x_2, z = x_3$ とすると (2-1), (2-2) (2-3)はそれぞれ

$(\vec{r})_i = x_i$　$i = 1, 2, 3.$　$(\vec{v})_i = \dot{x}_i$　$(\vec{a})_i = a_i = \dot{v}_i = \ddot{x}_i$

運動の法則

Newton eq.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2\text{-}4)$$

力ベクトル

$$(\vec{F})_i = F_i \quad i = 1,2,3. \qquad F_1 = F_x \quad F_2 = F_y \quad F_3 = F_z$$

$$F_i = m a_i = m \ddot{x}_i \qquad (2\text{-}4)'$$

F_iが与えられたと考えて、

$(2\text{-}4)'$は3つの連立微分方程式

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}}$$

ベクトル関数に関する微分方程式

ベクトルの大きさ

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3}.$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i$$

$$= x_i x_i$$

$\sum_{i=1}^{3}$を省略（Einsteinの記法）同じ添字が2回でてきたら和をとる。