学籍番号 201110843 大山侑太

抵抗入りの強制振動

$$m\ddot{x} = F$$

$$F = \underbrace{-kx}_{\text{復元力}} \underbrace{-\xi v}_{\text{抵抗力}} + F_e \cos\Omega t$$

$$\ddot{x} = -\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} x - \underbrace{\frac{\xi}{m}}_{\gamma} v + \underbrace{\frac{F_e}{m}}_{f_e} \cos\Omega t$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_e \cos\Omega t$$

← 非斉次項

$x = \mathrm{Re}\, z$ として

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f_e e^{i\Omega t}$$

まずは斉次解を求める

($\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ を考える(斉次方程式))

$z = e^{\lambda t}$ としてみる

$$\dot{z} = \lambda e^{\lambda t} = \lambda z, \quad \ddot{z} = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 z$$

$$(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2) e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (\leftarrow \text{特性方程式})$$

$$\lambda = \lambda_\pm = \frac{1}{2}\left\{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}\right\}$$

場合わけして考える

① 抵抗力が小さい時 ($\gamma < 2\omega_0$)

② 抵抗力が大きい時 ($\gamma > 2\omega_0$)

③ $\lambda^2 = 4\omega_0^2$ の時 (臨界減衰)

①抵抗力が小さい時 ($\gamma < 2\omega_0$)

$\gamma^2 - 4\omega_0^2 = -4\omega_0'^2$ とすると

$$\omega_0' = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}{2}$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left\{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\gamma \pm \sqrt{-4\omega_0'^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\gamma \pm i2\omega_0'\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}\gamma \pm i\omega_0'$$

よって

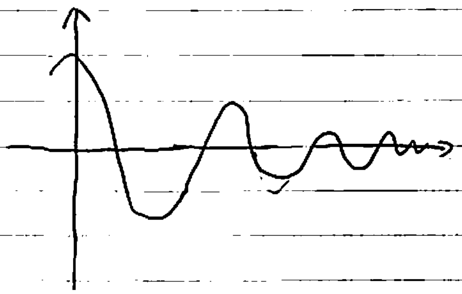
斉次解 $z = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t}$

$$= C_+ e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega_0' t} + C_- e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega_0' t}$$

$$= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(C_+ e^{i\omega_0' t} + C_-^{-i\omega_0' t}\right)$$

$$x = \mathrm{Re}\, z = e^{-\frac{\gamma}{2}t} C_0 \cos(\omega_0' t + \theta_0)$$

ここで C_0, θ_0 はある定数



減衰振動

② 抵抗が大きい時 ($r > 2\omega_0$)

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left\{-r \pm \sqrt{r^2-4\omega_0^2}\right\} < 0 \text{ (実)}$$

← $\sqrt{r^2-4\omega_0^2}$ が実数

($r>2\omega_0$ より $r^2-4\omega_0^2>0$
よって $r > \sqrt{r^2-4\omega_0^2}$ より $r-\sqrt{r^2-4\omega_0^2}>0$
となるので $-r\pm\sqrt{r^2-4\omega_0^2} < 0$.)

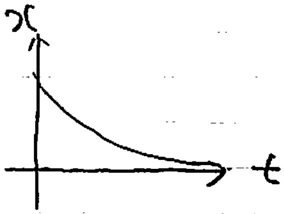
$$z = C_+ e^{\lambda_+ t} + C_- e^{\lambda_- t}$$
$$= C_+ e^{-|\lambda_+|t} + C_- e^{-|\lambda_-|t}$$

過減衰 (over damped)

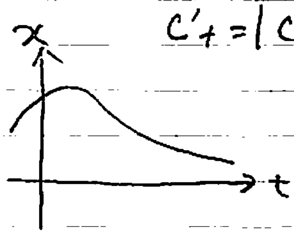
$$x = \mathrm{Re}\, z = C'_+ e^{-|\lambda_+|t} + C'_- e^{-|\lambda_-|t}$$

$|\lambda_-| > |\lambda_+|$

$C'_+ = |C_+|$, $C'_- = |C_-|$



または



No. Date

③ $\lambda^2 = 4\omega_0^2$ の時（臨界減衰）

$\lambda_+ = \lambda_- = \lambda_0$ 　λが重解 λ_0 をもつことから

$(\lambda^2 + r\lambda + \omega_0^2) = (\lambda - \lambda_0)^2$

$$\ddot{z} + r\dot{z} + \omega_0^2 z = \left(\frac{d^2}{dt^2} + r\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right) z$$

$$= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 z = 0$$

$z = e^{\lambda t}$ とすると

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 e^{\lambda t} = (\lambda - \lambda_0)^2 e^{\lambda t}$$ （一般のλについて）

両辺をλで微分すると

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 t e^{\lambda t} = 2(\lambda - \lambda_0) e^{\lambda t} + (\lambda - \lambda_0) t e^{\lambda t}$$

$\lambda = \lambda_0$ とおく

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^2 t e^{\lambda t} = 0$$

$\therefore$ $z = te^{\lambda t}$ も斉次方程式の解

一般解

$$z = C_1 e^{\lambda_0 t} + C_2 t e^{\lambda_0 t}$$

$$= e^{-|\lambda_0| t} (C_1 + t C_2)$$ 　$\lambda_0 = -|\lambda_0|$

$$x = \mathrm{Re}\, z = e^{-|\lambda_0| t} (C_1' + t C_2')$$ 　$C_1' = |C_1|$, $C_2' = |C_2|$

$$\longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$$

$F_e = 0$（外力なし）なら $x \to 0$ $(t \to \infty)$

→ 振動はとまる

外力があれば？

一般解 $= \underset{\uparrow}{x_g} + z_0 \leftarrow$ 特解

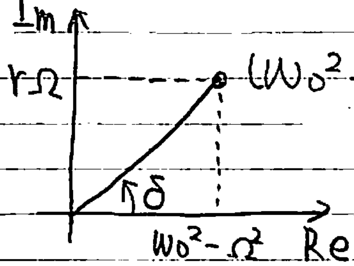
斉次方程式の一般解
$\rightarrow 0 \ (t \rightarrow \infty)$

$z_0 = Ae^{i\Omega t}$ としてみる

$$\ddot{z}_0 + r\dot{z}_0 + \omega_0^2 z_0 = f_e e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 + ri\Omega + \omega_0^2) A \cancel{e^{i\Omega t}} = f_e \cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$A = \frac{f_e}{\omega_0^2 - \Omega^2 + ir\Omega}$$



$(\omega_0^2 - \Omega^2) + ir\Omega$

$\downarrow$

$$\underbrace{(\omega_0^2 - \Omega^2 + ir\Omega)}_{\Omega_0^2} e^{i\delta}$$

$$\Omega_0^2 = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (r\Omega)^2$$

$$A = \frac{f_e}{\Omega_0^2 e^{i\delta}}$$

$$z_0 = \frac{f_e}{\Omega_0^2} e^{i(\Omega t - \delta)}$$

$\Omega : 0 \rightarrow \omega_0 \rightarrow \infty$

$\delta : \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\delta_0} \rightarrow \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$

($\Omega = \omega_0$ のとき
$\omega_0^2 - \Omega^2 + ir\Omega = ir\Omega$ 虚部だけ
$\rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}$
$\Omega \rightarrow \infty$ のとき
$\omega_0^2 - \Omega^2 + ir\Omega \rightarrow -\infty$
$\rightarrow \delta \rightarrow \pi$)

$$x_0 = \mathrm{Re}\, z_0 = \frac{f_e}{\Omega^2}\cos(\Omega t - \delta)$$

強制力がある時の一般解

$$x = x_g + \frac{f_e}{\Omega^2}\cos(\Omega t - \delta) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{f_e}{\Omega^2}\cos(\Omega t - \delta)$$

抵抗力の行う仕事 ($t \to \infty$ で)

$$W_\xi = -\underbrace{\xi v}_{抵抗力}\cdot v = -\xi v^2 = -\xi\left(\frac{f_e}{\Omega_0^2}\right)^2\Omega^2\underbrace{\sin^2(\Omega t-\delta)}_{振動する}$$

$$x = \frac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t-\delta)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1-\cos 2(\Omega t-\delta))$$
$$\to \frac{1}{2} \text{ (平均して)}$$

$$\overline{W_\xi} = -\xi\left(\frac{f_e}{\Omega_0^2}\right)^2\Omega^2\cdot\frac{1}{2}$$

一方, 外力のする仕事率

$$W_e = F_e\cos\Omega t\cdot v$$
$$= F_e\cos\Omega t\cdot\left(-\frac{f_e}{\Omega_0^2}\Omega\sin(\Omega t-\delta)\right)$$
$$= -\frac{F_e f_e}{\Omega_0^2}\Omega\cos\Omega t\sin(\Omega t-\delta)$$

$$= \cos\Omega t\sin\Omega t\cos\delta - \cos\Omega t\cos\Omega t\sin\delta$$

$$\cos\Omega t\sin\Omega t = \frac{1}{2}\sin\frac{\Omega t}{2} \xrightarrow{t\to\infty で} 0$$

$$\cos\Omega t\cos\Omega t \xrightarrow{t\to\infty で} \frac{1}{2}$$

$$\overline{W_e} = \frac{F_e f_e}{\Omega_0^2}\Omega\frac{\sin\delta}{2}$$
$$= m\frac{f_e^2}{\Omega_0^2}\frac{\Omega}{2}\cdot\frac{r\Omega}{\Omega_0^2}$$
$$= \xi\left(\frac{f_e}{\Omega_0}\right)^2\Omega^2\cdot\frac{1}{2}$$
$$= -\overline{W_\xi}$$

$$\to \sin\delta = \frac{r\Omega}{\Omega_0^2}$$

$$\frac{F_e}{m} = f_e \to F_e = \frac{f_e}{m}$$

$$\frac{r}{m} = \xi \to mr = \xi$$

外力がした仕事は抵抗力の行う仕事となった

Date . . No.

☆ 3次元の質点の運動

世界線を定める (3+1)次元中の線

時刻tでの質点の座標

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を定める

$\Downarrow$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

時刻tごとに $\vec{r}(t)$ が定まる

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$ 位置ベクトル

時刻tごとに ベクトルが定まる

速度ベクトル $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$

$$v_x(t) = \dot{x}(t)$$
$$v_y(t) = \dot{y}(t)$$
$$v_z(t) = \dot{z}(t)$$

加速度ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix}$

$$a_x(t) = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t)$$
$$a_y(t) = \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t)$$
$$a_z(t) = \dot{v}_z(t) = \ddot{z}(t)$$

$x = x_1$
$y = x_2$
$z = x_3$ と書く

$(\vec{r})_i = x_i \quad i = 1, 2, 3$

$(\vec{v})_i = \dot{x}_i \quad (\vec{a})_i = a_i = \dot{v}_i = \ddot{x}_i \quad i = 1, 2, 3$

運動の法則

Newton eq $\underset{\text{力ベクトル}}{\vec{F}} = m\underset{\text{加速度ベクトル}}{\vec{a}}$ $\quad$ ($\vec{a}, \vec{F}$: $\underset{\text{向き＋大きさ}}{\text{ベクトル}}$)

$(\vec{F}_i) = F$ $\quad i = 1, 2, 3$ とする ($F_x = F_1$, $F_y = F_2$, $F_z = F_3$)

$F_i = m a_i = m \ddot{x}_i$ (*)

F_iが与えられたと考えると
(*)は3つの連立微分方程式

まとめて $\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}}$

ベクトル関数に関する微分方程式

例 ベクトルの大きさ

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i$$

$$= x_i x_i$$ ← Einsteinの記述

$\sum_{i=1}^{3}$を省略
同じ添字が2回でてきたら和をとる。