201110837 荒木広尚

I.

I.1 $T = \frac{1}{2}mv^2$

$\dot{T} = \frac{1}{2}m \cdot 2v \cdot \dot{v}$

$= m\dot{v}v$

$= mav$

$= Fv$

I.2 重力 $F = mg$ は保存力である。

$F(x) = -\frac{d}{dx}V(x)$

$mg = -\frac{d}{dx}V(x)$

$\int dx\, mg = -\int dx \frac{d}{dx}V(x)$

$= -\int dV(x)$

$mgx = -V(x) + C$

$\therefore V(x) = -mgx + C$ （Cは積分定数）

I.3 $F = mg$

$ma = mg$

$a = g$ ← tについて積分

$v(t) = gt + C_1$ ← tについて積分

$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$

$v(0) = C_1 = -v_0$

$x(0) = C_2 = 0$

$\therefore x(t) = \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t$

I.4 $v(t) = gt - v_0$ より、

$T = \frac{1}{2}m(gt - v_0)^2$

$= \frac{1}{2}m(g^2t^2 - 2gv_0t + v_0^2)$

$\dot{T} = \frac{1}{2}m(2g^2t - 2gv_0)$

$= mg(gt - v_0)$

$= F \cdot v(t)$

よって $\dot{T} = Fv$ が導かれた。

I.5 系の運動エネルギーをKとすると、常に $K \geq 0$ であり、

$E = K + V(x)$

$E - V(x) = K \geq 0$

$\therefore E - V(x) \geq 0$ が成り立つ。

よってxの領域 $R = \{x \mid E - V(x) < 0\}$ には立ち入らない。

II.

II.1 $z_0 = Ae^{i\Omega t}$

$\dot{z}_0 = Ai\Omega e^{i\Omega t}$

$\ddot{z}_0 = -A\Omega^2 e^{i\Omega t}$

$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f_e e^{i\Omega t}$ …① に代入して.

$-A\Omega^2 e^{i\Omega t} + \gamma A i\Omega e^{i\Omega t} + \omega_0^2 A e^{i\Omega t} = f_e e^{i\Omega t}$

$A(\omega_0^2 - \Omega^2 + i\gamma\Omega) = f_e$

$\therefore A = \dfrac{f_e}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega}$

II.2 $z_0 = \dfrac{f_e}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\gamma\Omega} e^{i\Omega t}$

$= \dfrac{f_e}{\Omega_0^2 e^{i\delta}} e^{i\Omega t}$

$= \dfrac{f_e}{\Omega_0^2} e^{i(\Omega t - \delta)}$

$= \dfrac{f_e}{\Omega_0^2}\{\cos(\Omega t - \delta) + i\sin(\Omega t - \delta)\}$

Ω_0, f_e は実数より.

$\mathrm{Re}\, z_0 = \dfrac{f_e}{\Omega_0^2}\cos(\Omega t - \delta)$

II.3 $z = e^{\lambda t}$ とおくと,

$\dot{z} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{z} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

斉次方程式 $\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ に代入して

$\lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0 e^{\lambda t} = 0$

$e^{\lambda t}(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2) = 0$

$\lambda_\pm = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$

II.4 $z = C_1 e^{\lambda(t+\theta)}$ $(C_1, \theta \in R)$ とおくと

$\dot{z} = C_1\lambda e^{\lambda(t+\theta)}$ $\ddot{z} = C_1\lambda^2 e^{\lambda(t+\theta)}$ となり.

II.3と同様に z は $\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$ を満たし

$\lambda_\pm = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$

z は任意定数を2コ含むので斉次方程式の一般解としてよい。

$\lambda_\pm$ を ω_0' を用いて表すと.

$\lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \omega_0' i$

したがって

$z = C_1 e^{(-\frac{\gamma}{2} \pm \omega_0' i)(t+\theta)}$

$= C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\frac{\gamma}{2}\theta} \cdot e^{\pm\omega_0'(t+\theta)i}$

$= C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}\theta} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}\lambda} \cdot \{\cos\{\pm\omega_0'(t+\theta)\} + \sin\{\pm\omega_0'(t+\theta)\} i\}$

(3枚目へ) –

$x = \mathrm{Re}\, z = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}\theta} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\{i\omega_0'(t+\theta)\}$

$\cos\{-\omega_0'(t+\theta)\} = \cos\{\omega_0'(t+\theta)\}$ より.

$x = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}\theta} \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\{\omega_0'(t+\theta)\}$

ここで $C = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}\theta}$, $\theta' = \omega_0'\theta$ とおくと,

$x = C e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega_0' t + \theta')$

II.5 摩擦が大きいとき $\gamma > 2\omega_0$ で.

$\lambda_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\gamma}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2\omega_0}{\gamma}\right)^2}$

$= -\frac{\gamma}{2}\left(1 \mp \sqrt{1-\left(\frac{2\omega_0}{\gamma}\right)^2}\right)$

ここで $\gamma > 2\omega_0$ で, $k>0$, $m>0$, $\xi>0$ から $\gamma>0$, $\omega_0>0$ であるから.

$1 > \frac{2\omega_0}{\gamma} > 0$

$1 > \left(\frac{2\omega_0}{\gamma}\right)^2 > 0$

$1 > 1-\left(\frac{2\omega_0}{\gamma}\right)^2 > 0$

これより. $\lambda_\pm$は実数。さらに計算を進めると.

$2 > 1+\sqrt{1-\left(\frac{2\omega_0}{\gamma}\right)^2} > 1$, $1 > 1-\sqrt{1-\left(\frac{2\omega_0}{\gamma}\right)^2} > 0$

$-\frac{\gamma}{2} > \lambda_+ > -\gamma$, $0 > \lambda_- > -\frac{\gamma}{2}$

$\gamma > 0$ であるから $\lambda_\pm < 0$ である。

$\lambda_\pm < 0$ が示されたので, $\lambda_\pm = -|\lambda_\pm|$ である。

$z = C_+ e^{-|\lambda_+|t} + C_- e^{-|\lambda_-|t}$

とすれば、II.3 より このzは斉次方程式を満たし、$\lambda_\pm$が実数だから

zも実数。

ゆえに $x = \mathrm{Re}\, z = z$

$= C_+ e^{-|\lambda_+|t} + C_- e^{-|\lambda_-|t}$

II.6 $e^{i\delta} = \dfrac{(\omega_0^2-\Omega^2)+i\gamma\Omega}{\Omega_0^2}$

$e^{i\delta} = \cos\delta + i\sin\delta$ より.

$$\begin{cases} \cos\delta = \dfrac{\omega_0^2-\Omega^2}{\Omega_0^2} & \cdots ① \\ \sin\delta = \dfrac{\gamma\Omega}{\Omega_0^2} & \cdots ② \end{cases}$$

①のδをΩについて微分すると.

$$-\sin\delta \cdot \frac{d\delta}{d\Omega} = \frac{(\omega_0^2-\Omega^2)'\Omega_0^2 - (\omega_0^2-\Omega^2)\cdot\frac{d}{d\Omega}(\Omega_0^2)}{(\Omega_0^2)^2}$$

$$\frac{d\delta}{d\Omega} = \frac{(\omega_0^2-\Omega^2)'\Omega_0^2 - (\omega_0^2-\Omega^2)\cdot\frac{d}{d\Omega}(\Omega_0^2)}{(\Omega_0^2)^2}\cdot\left(-\frac{\Omega_0^2}{\gamma\Omega}\right)$$

(4枚目へ) —

(3枚目の続き) ―

これを計算すると、

$$\frac{d\delta}{d\Omega} = \gamma \cdot \frac{\Omega^2 + \omega_0^2}{\Omega_0^4}$$

$\gamma > 0$ より $\frac{d\delta}{d\Omega} > 0$ であるから δ は単調増加 ・・・(1)

2回微分を計算すると、

$$\frac{d^2\delta}{d\Omega^2} = \frac{-2\gamma\Omega\left(\Omega^4 + 2\omega_0^2\Omega^2 - 3\omega_0^4 + (\gamma\omega_0)^2\right)}{\Omega_0^8}$$

$\frac{d\delta}{d\Omega} = 0$ のとき $\Omega = 0$ または $\Omega^4 + 2\omega_0^2\Omega^2 - 3\omega_0^4 + (\gamma\omega_0)^2 = 0$

$\Omega \neq 0$ のとき $f(\Omega) = \Omega^4 + 2\omega_0^2\Omega^2 - 3\omega_0^4 + (\gamma\omega_0)^2$ とすると、

$\frac{d}{d\Omega}f(\Omega) = 4\Omega(\Omega^2 + \omega_0^2) > 0$

$f(\Omega)$ は単調増加

$f(0) = -3\omega_0^4 + (\gamma\omega_0)^2 < 0$ すなわち $\gamma^2 < 3\omega_0^2$ のとき

$\frac{d\delta}{d\Omega} = 0$ は $\Omega = 0$ 以外に解をもつ。

$\therefore \Omega = 0$ または、$\gamma^2 < 3\omega_0^2$ のとき $\Omega \neq 0$ の地点に変曲点をもつ ・・・(2)

次に δ の極限を調べると、

$\lim_{\Omega \to +0} \cos\delta = 1$ ・・・(3)

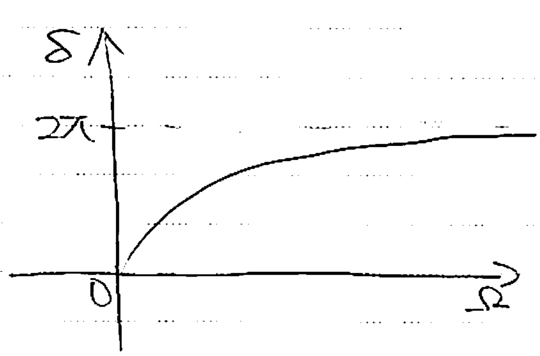
$\lim_{\Omega \to \infty} \cos\delta = 1$ ・・・(4)

また $\sin\delta = \frac{\gamma\Omega}{\Omega_0^2}$ より $\sin\delta = 0$ を満たすのは $\Omega = 0$ の時のみ。これと(1)より、$\Omega : 0 \to \infty$ において $\Omega = 0$ 以外に $\delta = 2n\pi$ となる点は存在しない。

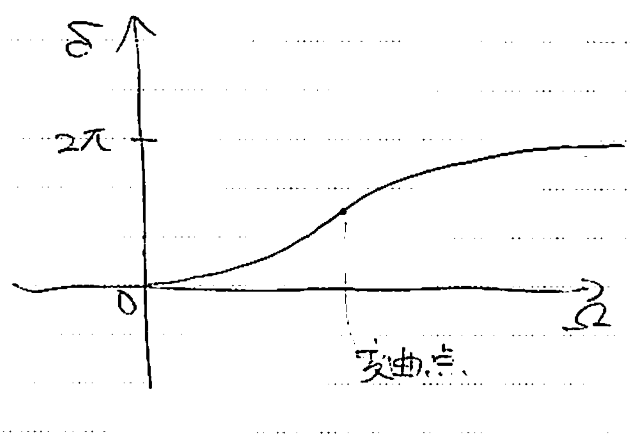
よって(3)で $\lim_{\Omega \to +0} \delta = 0$ とすれば、(4)から $\lim_{\Omega \to \infty} \delta = 2\pi$.

(2)から、

$\gamma^2 > 3\omega_0^2$ のとき



$\gamma^2 < 3\omega_0^2$



III.

III.1 $x = c \cdot e^{\lambda t}$ とおくと、

$\dot{x} = c\lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = c\lambda^2 e^{\lambda t}$ を微分方程式に代入して、

$(\lambda^2 - 2\lambda + 1)x = 0$

$\lambda = 1 \pm \sqrt{2}i$

重ね合わせの原理より、

$x = C_1 e^{(1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})t}$

(C_1, C_2 は任意定数)

III.2. III.1と同様に

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda = 1$

III.3. $(D-1)^2 e^{\lambda t} = (\lambda - 1)^2 e^{\lambda t}$

両辺を λ で微分すると、

$(D-1)^2 \cdot t e^{\lambda t} = 2(\lambda - 1) e^{\lambda t} + (\lambda - 1)^2 \cdot t e^{\lambda t}$

$\lambda = 1$ を代入すると、

$(D-1)^2 \cdot t e^{t} = 0$

$e^t > 0$ より $(D-1)^2 t = 0$

よって

$(D-1)^2 t e^{\lambda t} = 0$

III.4. $x = t e^{\lambda t}$ とおくと、

上と同様に

$t\lambda^2 + (2-2t)\lambda + t - 2 = 0$

$(t\lambda - (t-2))(\lambda - 1) = 0$

$\lambda = \frac{2-t}{t}, 1$

ゆえに 重ね合わせの原理より、

$x = c\, t e^{\frac{2-t}{t} t} + C_2 e^t$

$= c\, t e^{2-t} + C_2 e^t$

$= c e^2 t e^{-t} + C_2 e^t$

$c e^2 = C_1$ とおくと、

$x = C_1 t e^{-t} + C_2 e^t$

(C_1, C_2 は任意定数)

III.5. IIで $\gamma=2\omega_0$ のとき、斉次方程式は

$\ddot{x}+2\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=0$ すなわち

$(D^2+2\omega_0D+\omega_0^2)x=0$ と書ける.

III.2と同様に $x=e^{\lambda t}$ とおくと、

$\lambda^2+2\omega_0\lambda+\omega_0^2=0$

$\lambda=-1$

$\therefore x=e^{-t}$ を解にもつ。

III.3と同様に $(D+1)^2e^{\lambda t}=(\lambda-1)^2e^{\lambda t}$ の両辺をλで微分し、そのあとで$\lambda=1$を代入してみると、$(D+1)^2te^{\lambda t}=0$ が導かれる.

したがって$x=te^{\lambda t}$とおくと、同様に計算して.

$\lambda=-1,\ -\frac{t+2}{t}$

$\therefore x=te^{-\frac{t+2}{t}\cdot t}$

$=te^{-t-2}$ を解にもつ.

上より、重ね合わせの原理から、斉次解は、

$x=C_1e^{-t}+Ce^{-2}te^{-t}$

$Ce^{-2}=C_2$ とおいて.

$\therefore x=C_1e^{-t}+C_2te^{-t}$

(C_1, C_2は任意定数)

e^{-t}, te^{-t}は $t\to\infty$ で 0に近づくので、斉次解は時間tの増加とともに減衰する。