201110860 佐藤 拓磨

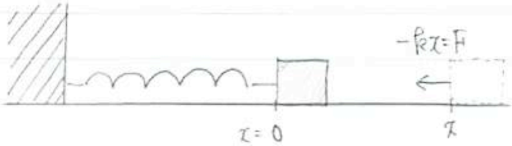
・振動現象

ex). バネの振動

$F = ma$ より

$-kx = m\ddot{x}$

$\therefore\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$



ここで、

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{———} \quad (*)$

$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}x + \omega_0^2 x = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right] x = 0$

$\Leftrightarrow (D^2 + \omega_0^2)\, x = 0 \quad , \quad D = \frac{d}{dt}$

また、

$L = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$ とおくと、

(*)は、 $L(x) = 0$ とかけて、Lがxに作用するという。

・L：線型であるとき、

重ね合わせの原理が成立する。

$\Leftrightarrow$ $x_1, x_2, \cdots$ が $L[x_1] = 0,\ L[x_2] = 0, \cdots$ なら

$L[c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots] = 0$ ($c_1, c_2, \cdots$：定数) が成立つ。

では、実際に

x が何かを探してくるにはどうしたらよいか??

$\rightarrow$ $x = e^{\lambda t}$ としてみる。

すると、

$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = \lambda e^{\lambda t} \\ \frac{d^2}{dt^2}x = \lambda^2 e^{\lambda t} \end{cases}$

であるから、

$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) e^{\lambda t} = (\lambda^2 + \omega_0^2)\, e^{\lambda t} = 0$

したがって、

$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ として、このλに関する特性方程式を解けばよい。

$\therefore\ \lambda = \pm i\omega_0$

よって

$x = e^{\pm i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm i \sin\omega_0 t$ ($\because$ Euler の公式)

NO.

DATE

i.e. 重ね合わせの原理 より

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \qquad (C_1, C_2 : \text{ある定数})$$

↑ 一般解

次に 物理的に 初期条件 として

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = \dot{x}\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

とすると、

$$\begin{cases} x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = x_0 \\ \dot{x}(t) = C_1(i\omega_0) e^{i\omega_0 t} + C_2(-i\omega_0) e^{-i\omega_0 t} \\ \text{より} \\ \dot{x}(0) = i\omega_0 (C_1 - C_2) = 0 \end{cases}$$

以上 から、

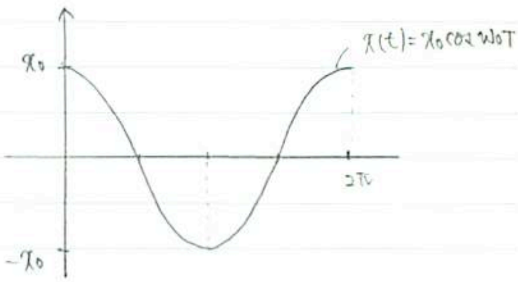
$$C_1 = C_2 \ , \quad C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$$

$$\therefore\ x(t) = \frac{x_0}{2} e^{i\omega_0 t} + \frac{x_0}{2} e^{-i\omega_0 t} = \frac{x_0}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$= x_0 \cos \omega_0 t \qquad \left(\because\ \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)\right)$$

となり、具体的な運動が記述できる。

すると グラフが 書けて、
右図 のようになる。



$$\therefore\ \omega_0 T = 2\pi$$

$$\therefore\ T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

○ Newton eq. から導かれる一般論 について議論してみる

$$F = m\ddot{x}$$

両辺に $v = \dot{x}$ をかけると、

$$F \cdot v = m\ddot{x} \cdot \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2\right)$$

よって

$$F \cdot v = \frac{d}{dt} T \ , \qquad T = \frac{1}{2} m v^2 \ : \text{運動エネルギー}$$

このことが、単振動で成り立つか具体的に確認する。

$$\begin{cases} x = x_0 \cos w_0 t \\ v = -w_0 x_0 \sin w_0 t \end{cases}$$

$F = -kx$ より

$$F \cdot v = -k(x_0 \cos w_0 t)(-w_0 x_0 \sin w_0 t)$$
$$= k x_0^2 w_0 \sin w_0 t \cdot \cos w_0 t$$

一方で、

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (-w_0 x_0 \sin w_0 t)^2$$
$$= \frac{1}{2} m w_0^2 x_0^2 \cdot \sin^2 w_0 t$$

なので、

$$\frac{d}{dt} T = \frac{1}{2} m \cdot w_0^2 x_0^2 \cdot 2 w_0 \cdot \sin w_0 t \cdot \cos w_0 t$$
$$= m w_0^3 x_0^2 \cdot \sin w_0 t \cdot \cos w_0 t$$

ここで、$w_0^2 = \frac{k}{m}$ より

$$= m \cdot \frac{k}{m} w_0 x_0^2 \cdot \sin w_0 t \cdot \cos w_0 t$$
$$= k w_0 x_0^2 \cdot \sin w_0 t \cdot \cos w_0 t = Fv$$

したがって
単振動の場合も成り立つ。

○ 一般論の続きとして特別な場合について議論してみる。

$$F = -\frac{dV}{dt} \quad \text{（ポテンシャル力（保存力）の場合）}$$

ここで、

$\frac{d}{dt}T = Fv$ を $\int_{t_i}^{t_f}$ してみる　（i: initial , f: final）

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \cdot \frac{dT}{dt} = [T]_{t_i}^{t_f} = T_f - T_i = \Delta T$$ ：運動エネルギーの変化分

一方、

$$\int_{t_i}^{t_f} Fv \cdot dt = \int_{t_i}^{t_f} \left(-\frac{dV(x)}{dx}\right) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$$
$$= -\int_{x(t_i)}^{x(t_f)} \frac{dV(x)}{dx} \cdot dx$$
$$= -[V(x)]_{x(t_i)}^{x(t_f)}$$
$$= -(V(x(t_f)) - V(x(t_i))) = -\Delta V, \quad \Delta V = V(x_f) - V(x_i)$$

$\therefore \quad \Delta T = -\Delta V$

$\Delta T + \Delta V = \Delta(T+V) = 0$, $T+V$: 全力学的エネルギー

これは、つまり

<u>運動の前後(もしくは途中)で変化しない.</u>

ということである

次に単振動に適用して、具体的に成り立つかを確認する。

$$F = -kx = -\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{2}kx^2$$

より、

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$ とすればよい.

ここで

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(x_0\omega_0\sin\omega_0 t)^2$$
$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2\omega_0 t$$
$$= \frac{1}{2}kx_0^2\cdot\sin^2\omega_0 t \qquad (\because\ \omega = \frac{k}{m})$$

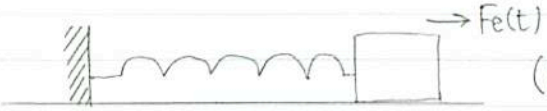
$$V = \frac{1}{2}x_0^2\cos^2\omega_0 t$$

$$T + V = \frac{1}{2}kx_0^2(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t)$$
$$= \frac{1}{2}kx_0^2 = V(x(0))$$

↖ $T|_{t=0} = 0$ (時間$t=0$で$v=0$)に相当

○ + 外力

<u>強制振動</u>



(Feとかいたとき Feは定数)

外力 $F_e(t)$ を加えてみる.

特に、

周期的外力: $F_e(t) = F_e\cos\Omega t$

としてみる。

Newton eq. より

$$m\ddot{x} = F = -kx + F_e\cos\Omega t$$

では、

$x = x(t)$ は どうなるのか??

NO

DATE

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\frac{F_e}{m} = f_e$ とおくと

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_e \cos \Omega t$$

ここで、Euler の公式 より

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mathrm{Re}\, e^{i\Omega t}$$ ($\mathrm{Re}\, e^{i\Omega t}$: $e^{i\Omega t}$ の実数部分)

もし、

$\ddot{z} + \omega_0^2 z = e^{i\Omega t}$ の 解ならば、

$$\mathrm{Re}(\ddot{z} + \omega_0^2 z) = \mathrm{Re}\cdot e^{i\Omega t}$$

$x = \mathrm{Re}\, z$ とすれば

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_e \cos \Omega t$$

① 非斉次の微分方程式の一般解とは…

斉次方程式の一般解 + 非斉次方程式の特解

z_g 〃 　　　 z_0 〃

したがって

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) z = f_e e^{i\Omega t}$$

指針 として

$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) z_g = 0$ (ただし z_g は任意定数 を2コ含む)

$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) z_0 = f_e e^{i\Omega t}$

z_g, z_0 の 2つを出す

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right)(z_g + z_0) = f_e e^{i\Omega t}$$

$z_g + z_0$: 任意定数 を2コ含む 非斉次方程式 の 一般解

$z_g = C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}$ とわかっているので、

特解 z_0 を 探してくる。

$\underline{\underline{z_0 = A e^{i\Omega t}}}$ とおいてみる (A : 定数)

$\ddot{z}_0 + \omega_0^2 z_0 = f_e e^{i\Omega t}$ において、

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) e^{i\Omega t} = f_e e^{i\Omega t}$$

(i). $\omega_0 \neq \Omega$ のとき

$A = \frac{f_e}{\omega_0^2 - \Omega^2}$ であるから、

特解 $z_0 = \frac{f_e}{\omega_0^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t}$

と定まり、

NO.

DATE

一般解は

$$Z = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} + \frac{f_e}{\omega_0^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t}$$

ここで

$x = \mathrm{Re}\, Z$ であるから

$$x = C_1' \cos(\omega_0 t + \theta) + \frac{f_e}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \Omega t \qquad (C_1', \theta \text{ はある定数})$$

(ii) $\Omega = \omega_0$ のとき

特解 z_0 を別の形に仮定する

$z_0 = A \cdot t e^{i\Omega t}$ としてみる

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} z_0 = A e^{i\Omega t} + A t (i\Omega) e^{i\Omega t} \\ \dfrac{d^2}{dt^2} z_0 = A(i\Omega) \cdot e^{i\Omega t} + A(i\Omega) e^{i\Omega t} + A t (i\Omega)^2 e^{i\Omega t} \\ \qquad = 2Ai\Omega e^{i\Omega t} - \Omega^2 A t e^{i\Omega t} \end{cases}$$

これを $\ddot{z}_0 + \omega_0^2 z_0$ に代入して

$$2Ai\Omega e^{i\Omega t} - \Omega^2 A t e^{i\Omega t} + \omega_0^2 A t e^{i\Omega t}$$

$$= 2Ai\Omega e^{i\Omega t} \qquad (\because \omega_0 = \Omega)$$

したがって

$$2Ai\Omega e^{i\Omega t} = f_e e^{i\Omega t}$$

$$\therefore A = \frac{f_e}{2i\Omega} = -i \frac{f_e}{2\Omega}$$

よって一般解は

$$Z = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} - \frac{1}{2} i \frac{f_e t}{\Omega} e^{i\omega_0 t} \qquad (\because \omega_0 = \Omega)$$

$x = \mathrm{Re}\, Z$ より

$$x = C_1' \cos(\omega_0 t + \theta) + \frac{f_e}{2\Omega} t \sin \omega_0 t \qquad (C_1', \theta : \text{ある定数})$$

振幅が t によって増加

⇒ このような状況 ($\omega_0 = \Omega$) を共鳴

どういうことか??

ω_0 : 固有振動数 （各物質に固有のものがある.）

に合った周期でゆすると，どんどん振幅が大きくなる.