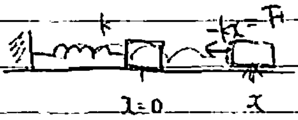
201110858　佐々木さゆり　　DATE 5.10 (火)

振動現象

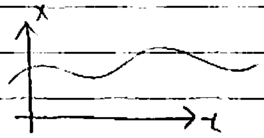
バネの振動



Newton eq.　$F = ma$

$-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,\quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$x = x(t)$



関数が決まる $\Leftrightarrow$ グラフ確定
世界線が確定

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right]x = 0$

$= (D^2 + \omega_0^2)x = 0 \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$

$= L[x]$　　Lがxに作用する。

$L = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$

L：線型である

$\Rightarrow$ 重ね合わせの原理が成立

$x_1, x_2, \cdots$ が $L[x_1] = 0,\ L[x_2] = 0 \cdots$ なら、
$L[c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots] = 0 \quad (c_1, c_2, \cdots$ は定数$)$

x_1 ? ← なにかさがしてくる。　$\Rightarrow$ $x = e^{\lambda t}$ としてみる。

$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t},\quad \frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right)e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t}$

$= (\lambda^2 + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ として λ を定めればよい。
↑ 特性方程式　$\lambda^2 = -\omega_0^2,\quad \lambda = \pm i\omega_0$

2つの解がみつかった!!　$e^{i\omega_0 t},\ e^{-i\omega_0 t}$
$(e^{\pm i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm i\sin\omega_0 t)$ ← Eulerの公式

重ね合わせの原理より、$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$　$(C_1, C_2$：ある定数$)$　一般解

物理的には初期条件：$x(0) = x_0$，$v(0) = \dot{x}\big|_{t=0} = 0$

$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},\quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

たとえば……

$x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = x_0$

$\dot{x}(t) = C_1(i\omega_0)e^{i\omega_0 t} + C_2(-i\omega_0)e^{-i\omega_0 t}$

$\dot{x}\big|_{t=0} = i\omega_0(C_1 - C_2) = 0 \qquad C_1 = C_2$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}x_0$

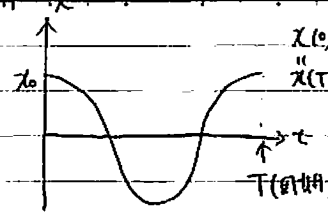
$x(t) = x_0 \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$

$= x_0 \cos\omega_0 t$

NO

DATE

$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$ のグラフ



$x(0) = x_0$

$\ddot{x}(T) = x_0 \cos\omega_0 T$

$\omega_0 T = 2\pi$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

一般論

$$F = m\ddot{x} \qquad v = \dot{x}$$

合成関数の微分

$$Fv = m\ddot{x}\dot{x} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 \quad \left(\because \frac{1}{2}m\,2\dot{x}\frac{d}{dt}\dot{x}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{仕事率}}}{Fv} = \frac{d}{dt}T, \qquad T = \frac{1}{2}mv^2 \text{ : 運動エネルギー}$$

単振動で確認してみよう

$$x = x_0 \cos\omega_0 t$$

$$v = \dot{x} = -x_0\omega_0 \sin\omega_0 t$$

$$F = -kx$$

$$Fv = -k(x_0\cos\omega_0 t)(-x_0\omega_0\sin\omega_0 t) = kx_0^2\omega_0 \sin\omega_0 t\cos\omega_0 t$$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(-x_0\omega_0\sin\omega_0 t)^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 \times \sin^2\omega_0 t$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2\,2\omega_0\sin\omega_0 t\cdot\cos\omega_0 t = m\omega_0^3x_0^2\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t \quad \cdots *$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ より

$$* = m\cdot\frac{k}{m}x_0^2\omega_0\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t = kx_0^2\omega_0\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t = Fv$$

一般論の続き.

$F = -\dfrac{dV}{dx}$ ポテンシャル力(保存力)の場合

$\dfrac{d}{dt}T = Fv$ を $\displaystyle\int_{t_i}^{t_f}dt$ してみる.

$$\int_{t_i}^{t_f}dt\,(左辺) = \int_{t_i}^{t_f}dt\cdot\frac{d}{dt}T = [T]_{t_i}^{t_f} = T_f - T_i = \Delta T \quad \Leftarrow \text{運動エネルギー変化}$$

$$\int_{t_i}^{t_f}dt\,(右辺) = \int_{t_i}^{t_f}Fv\,dt = \int_{t_i}^{t_f}\left(-\frac{dV(x)}{dx}\right)\frac{dx}{dt}\cdot dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{置換積分}}}{=} -\int_{x(t_i)}^{x(t_f)}\frac{dV(x)}{dx}dx$$

$$= -[V(x)]_{x(t_i)}^{x(t_f)} = -V(x(t_f)) + V(x(t_i)) = -\Delta V$$

$$\Delta V = V(x_f) - V(x_i)$$

f : final

i : initial

NO

DATE

$\cancel{\Delta T = -\Delta V}$

$\Delta T + \Delta V = \Delta (T + V) = 0$　　$T+V$：全力学的エネルギー

← 運動の前後（もしくは途中）で変化しない．

$T+V$：保存量 (conserved quantity)

運動の定数 (constant of motion)　　＊ V：ポテンシャル（エネルギー）

単振動に適用できるかどうか？

$F = -kx = -\frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{2}kx^2$, $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ とすれば OK.

$x = x_0 \cos\omega_0 t$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(x_0\omega_0 \sin\omega_0 t)^2$$

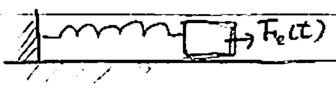
$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}k x_0^2 \sin^2\omega t$$

$$V = \frac{1}{2}k x_0^2 \cos^2\omega_0 t$$

$$T + V = \frac{1}{2}k x_0^2 (\sin^2\omega_0 t + \cos^2\omega_0 t) = \frac{1}{2}k x_0^2 = V(x(0))$$

$T|_{t=0} = 0$ （時間 $t=0$ で $v=0$）

＋ 外力

強制振動 

← 外力 $F_e(t)$ を加えてみる．

特に周期的外力 $F_e(t) = F_e \cos\Omega t$ としてみる。　（F_e：定数）

Newton eq.　　$m\ddot{x} = F = -kx + F_e \cos\Omega t$

$x = x(t)$?

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_e \cos\Omega t$$

$$= \mathrm{Re}\, e^{i\Omega t}$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\frac{F_e}{m} = f_e$

もし $\ddot{z} + \omega_0^2 z = e^{i\Omega t}$ の解なら

$$\mathrm{Re}(\ddot{z} + \omega_0^2 z) = \mathrm{Re}\, e^{i\Omega t}$$

$x = \mathrm{Re}\, z$ とすれば　$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t$

$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right) x = f_0 e^{i\Omega t}$　非斉次微分方程式

一般解 ＝ 斉次方程式の一般解 （$= z_g$）

＋

非斉次方程式の特解 （$= z_0$）

NO

DATE

$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)z_g = 0$ ただし z_g は任意定数を(2コ)含む

$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)z_0 = f_e e^{i\Omega t}$ → ⊕ $\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)(z_g+z_0) = f_e e^{i\Omega t}$

z_g+z_0: 任意定数を2コ含む非斉次方程式の一般解

$$z_g = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

特解 z_0 をさがしてくる。

$z_0 = Ae^{i\Omega t}$ とおいてみると、 $\dot{z}_0 = A(i\Omega)e^{i\Omega t}$

$\ddot{z}_0 = A(i\Omega)^2 e^{i\Omega t}$

$\ddot{z}_0 + \omega_0^2 z_0 = f_e e^{i\Omega t}$ ⇒ $A(\omega_0^2-\Omega^2)e^{i\Omega t} = f_e e^{i\Omega t}$

$\omega_0 \neq \Omega$ ならば、 $A = \frac{f_e}{\omega_0^2-\Omega^2}$

$$z_0 = \frac{f_e}{\omega_0^2-\Omega^2}e^{i\Omega t}$$

一般解 $z = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} + \frac{f_e}{\omega_0^2-\Omega^2}e^{i\Omega t}$

$x = \mathrm{Re}\, z$

$= C_1' \cos(\omega_0 t+\theta) + \frac{f_e}{\omega_0^2-\Omega^2}\cos\Omega t$ (C_1', θ はある実数 ↑初期条件から定まる)

$\omega_0=\Omega$ のときは?

特解 z_0 を別な形に仮定する ⇐ $z_0 = Ate^{i\Omega t}$ としてみる。

$\dot{z}_0 = Ae^{i\Omega t} + At(i\Omega)e^{i\Omega t}$, $\ddot{z}_0 = A(i\Omega)e^{i\Omega t} + A(i\Omega)e^{i\Omega t} + At(i\Omega)^2e^{i\Omega t}$

$= A2i\Omega e^{i\Omega t} - \Omega^2 Ate^{i\Omega t}$

同じ

$\ddot{z}_0 + \omega_0^2 z_0 = A2i\Omega e^{i\Omega t} - \Omega^2 Ate^{i\Omega t} + \omega_0^2 Ate^{i\Omega t}$

$= A2i\Omega e^{i\Omega t} = f_e e^{i\Omega t}$

$$A = \frac{f_e}{2i\Omega}e^{i\Omega t} = -i\frac{f_e}{2\Omega}e^{i\Omega t}$$

$$z = C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t} - i\frac{1}{2}\frac{f_e}{\Omega}t\underbrace{e^{i\Omega t}}_{=\cos\omega t + i\sin\omega t}$$

$x = \mathrm{Re}\,z$

$= C_1'\cos(\omega_0 t+\theta) + \underbrace{\frac{f_e}{2\Omega}t}\sin\omega_0 t$ (C_1', θ は初期条件で定まる)

↖振幅 ↑ 共鳴 resonance

ω_0: 固有振動数

摩擦がある場合（空気抵抗）

$$F = -kx + F_0 \cos \Omega t \underbrace{- \xi v}_{\text{抵抗力}}$$

* ξ（グザイ）

⇒ 振動は外力なしなら減衰する。外力があればおちつく。