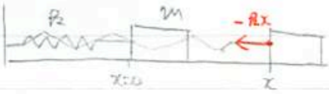
学籍番号：20110878　名前：平尾 亮磨

振動現象

バネの振動



Newton方程式より $F = ma$

$$-kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right]x = 0$$

$$(D^2 + \omega_0^2)x = 0 \qquad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$$

$$L[x] = 0$$ Lがxに作用する。

$$\left(L = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right)$$

Lは線型である　つまり重ね合わせの原理が成立

$x_1, x_2 \cdots$ が $L[x_1] = 0,\ L[x_2] = 0,\ \cdots$ ならば

$L[c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots] = 0$　（$c_1, c_2 \cdots$ は定数）

x は何か探してくる

$x = e^{\lambda t}$ としてみる.

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right)e^{\lambda t} = \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0 e^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda^2 + \omega_0^2)e^{\lambda t} = 0$$

$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ として λ を定めればよい：特性方程式

$$\lambda^2 = -\omega_0^2$$

$\lambda = \pm i\omega_0$（解が2個見つかった）

$\therefore e^{i\omega_0 t},\ e^{-i\omega_0 t}$　（$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm i\sin\omega_0 t$：Eulerの公式）

重ね合わせの原理より、

$x = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$　c_1, c_2 はある定数（一般解）

c_1, c_2 は物理的初期条件によって定まる。

$$x(0) = x_0$$

$v(0) = \dot{x}|_{t=0} = 0$　とすると、

$$x(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0$$

$$c_1 + c_2 = x_0 \quad \text{— ①}$$

$$\dot{x}(t) = c_1(i\omega_0)e^{i\omega_0 t} + c_2(-i\omega_0)e^{-i\omega_0 t}$$

$$\dot{x}(t)\big|_{t=0} = i\omega_0(c_1 - c_2) = 0$$

$$c_1 = c_2 \quad \text{— ②}$$

①, ②より　$2c_1 = x_0$

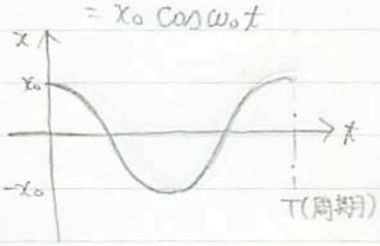
$c_1 = \frac{x_0}{2}$　$\therefore c_1 = c_2 = \frac{x_0}{2}$

∴ $x(t) = \frac{x_0}{2} e^{i\omega_0 t} + \frac{x_0}{2} e^{-i\omega_0 t}$

$= x_0 \cdot \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}$

$= x_0 \cos\omega_0 t$

$\left(\begin{array}{l} \sin\omega_0 t = \frac{e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}}{2} \\ \cos\omega_0 t = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \end{array} \right.$ より。



$\omega_0 T = 2\pi$

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ であるから

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

一般論　$F = m\ddot{x}$

$Fv = m\ddot{x}\dot{x}$

$= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}m(\dot{x})^2$

$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}\cdot\dot{x} = \frac{d}{dt}\dot{x}\cdot\dot{x} \\ \quad = \frac{d}{dt}(\dot{x})^2 \end{array} \right.$

$\underline{Fv} = \frac{d}{dt} T$　(但し $\underline{T = \frac{1}{2}mv^2}$)

仕事率　　運動エネルギー

単振動で確認

$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \cos\omega_0 t \\ v = -x_0\omega_0 \sin\omega_0 t \end{array} \right.$ であるから。

$F = -kx$

$Fv = -k(x_0\cos\omega_0 t)(-x_0\omega_0 \sin\omega_0 t)$

$= k x_0^2 \sin\omega_0 t \cos\omega_0 t$

ここで　$T = \frac{1}{2}mv^2$

$= \frac{1}{2}m(-x_0\omega_0\sin\omega_0 t)^2$

$= \frac{1}{2}m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2\omega_0 t$

$\frac{d}{dt}T = \frac{1}{2}m x_0^2\omega_0^2(2\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t)$

$= m x_0^2 \omega_0^2 \sin\omega_0 t\cos\omega_0 t$ — ※

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ より ※は $m x_0^2 \cdot \frac{k}{m}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t$

$= k x_0^2 \sin\omega_0 t \cos\omega_0 t$

$= Fv$

したがって $\frac{d}{dt}T = Fv$ は単振動において成り立つ。

一般論の続き

$\frac{d}{dt}T = Fv$

$F = -\frac{dV}{dx}$　ポテンシャル力(保存力)

積分 $\int_{t_i}^{t_f}$ をしてみる。

$\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt}T = [T]_{t_i}^{t_f}$

$= T_f - T_i$

$= \Delta T$　(運動エネルギーの変化)

$$\int_{ti}^{tf} Fv\,dt = \int_{ti}^{tf} \left(-\frac{dV(x)}{dx}\right)\frac{dx}{dt}\cdot dt$$

$t \to x(t)$ に置換積分

$$= -\int_{x(ti)}^{x(tf)} dx \cdot \frac{dV(x)}{dx}$$

$$= -\left[V(x)\right]_{x(ti)}^{x(tf)}$$

$$= -\Delta V \quad (但し、\Delta V = V(x_f) - V(x_i))$$

$\therefore \Delta T = -\Delta V$

$\Delta T + \Delta V = 0$

$\Delta(T+V) = 0$ ：運動の前後(途中)で変化しない。

$T+V$ は全力学的エネルギー

保存量(conserved quantity)，運動の定数(constant of motion)という。

単振動に適用できるか $F = -kx$

$$= -\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{2}kx^2$$

$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ とすればよい。

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m(x_0\omega_0\sin\omega_0 t)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2\sin^2\omega_0 t \quad \left(= \frac{1}{2}kx_0^2\sin^2\omega_0 t\right)$$

$$V = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2\omega_0 t$$

$$T+V = \frac{1}{2}kx_0^2(\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t)$$

$$= \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$= V(x(0))$$

$T|_{t=0} = 0$ (時間 $t=0$ で $v=0$)

これに外力を加える(強制振動)

$Fe(t)$：外力

特に周期的外力 $Fe(t) = Fe\cos\Omega t$ と仮定する。

定数

Newton eq より，$m\ddot{x} = -kx + Fe\cos\Omega t$

ここで $\frac{k}{m} = \omega_0^2$，$\frac{Fe}{m} = fe$ とすると，

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = fe\cos\Omega t$$

$$= \mathrm{Re}\, e^{i\Omega t}$$

もし，$\ddot{z} + \omega_0^2 z = e^{i\Omega t}$ の解なら

$\mathrm{Re}(\ddot{z} + \omega_0^2 z) = \mathrm{Re}\, e^{i\Omega t}$

$x = \mathrm{Re}\, z$ とすれば $\ddot{x} + \omega_0^2 x = fe\cos\Omega t$

$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)z = f_e\, e^{i\Omega t}$ ：非斉次の微分方程式

※一般解：斉次方程式の一般解 + 非斉次方程式の特解

$= z_g$ 　　　　　　$= z_0$

$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right) z_g = 0$ 　但し z_g は任意定数を(2個)含む

$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right) z_0 = f_e\, e^{i\Omega t}$

$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right)(z_g+z_0) = f_e\, e^{i\Omega t}$

$z_g + z_0$ のとき，任意定数を2個含む非斉次方程式の一般解

$z_g = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$

特解 z_0 を探してくる。

$$\begin{cases} z_0 = Ae^{i\Omega t} \quad \text{とおいて考える} \\ \dot{z}_0 = A(i\Omega)e^{i\Omega t} \\ \ddot{z}_0 = A(i\Omega)^2 e^{i\Omega t} \end{cases}$$

$\ddot{z}_0 + \omega_0^2 z_g = f_e\, e^{i\Omega t}$

$A(\omega_0^2-\Omega^2)e^{i\Omega t} = f_e\, e^{i\Omega t}$

(i) $\omega_0 \neq \Omega$ のとき 　$A = \frac{f_e}{\omega_0^2-\Omega^2}$

∴ $z_0 = \frac{f_e}{\omega_0^2-\Omega^2}e^{i\Omega t}$

一般解 　$z = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} + \frac{f_e}{\omega_0^2-\Omega^2}e^{i\Omega t}$

$x = \mathrm{Re}\, z$ であるから

$x = C_1'\cos(\omega_0 t+\theta) + \frac{f_e}{\omega_0^2-\Omega^2}\cos\Omega t$

但し、C_1', θ はある定数 ← 初期条件から定まる。

(ii) $\omega_0 = \Omega$ のとき

特解 z_0 を別の形に仮定する。

$z_0 = At\,e^{i\Omega t}$ として考える。

$\dot{z}_0 = Ae^{i\Omega t} + At(i\Omega)e^{i\Omega t}$

$\ddot{z}_0 = A(i\Omega)e^{i\Omega t} + A(i\Omega)e^{i\Omega t} + At(i\Omega)^2 e^{i\Omega t}$

$\quad = 2Ai\Omega\, e^{i\Omega t} - \Omega^2 At\, e^{i\Omega t}$

$\ddot{z}_0 + \omega_0^2 z_0 = 2Ai\Omega e^{i\Omega t} - \Omega^2 At e^{i\Omega t} + \omega_0^2 At e^{i\Omega t}$

$\Omega = \omega_0$ であるから

$\quad = 2Ai\Omega e^{i\Omega t} = f_e\, e^{i\Omega t}$

$\quad A = \frac{f_e}{2i\Omega} = -i\frac{f_e}{2\Omega}$

$z = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} - i\frac{1}{2}\frac{f_e}{\Omega}t\, e^{i\omega_0 t}$

$x = \mathrm{Re}\, z$ であるから，

$x = C_1'\cos(\omega_0 t+\theta) + \underbrace{\frac{f_e}{2\Omega}t}_{\text{振幅}}\sin\omega_0 t$ 　(C_1, θ：初期条件で定まる)

共鳴：resomamce 　ω_0：固有振動数