力学レポート（4/28授業まとめ）

物理学類 2クラス 201110P36

新井瑞穂

No.

Date

$$F(t) = m\ddot{x}(t)$$

両辺に $\dot{x}(t)$ をかける

$$F(t)\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)\dot{x}(t)$$

$$\left[\ddot{x}\dot{x} = \dot{v}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) \right]$$

$$F(t)\dot{x}(t) = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2$$

$$F(t)\cdot v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$K = \frac{1}{2}mv^2$: 運動エネルギー

$Fv\,[N\cdot m/s] = $ 仕事率

$= [J/s]$

$$\therefore \underbrace{\frac{d}{dt}K = Fv}_{\text{Newton方程式の帰結}}$$

→ 運動エネルギーの時間変化は仕事率に等しい

t について $t_1 \to t_2$ まで積分する

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{dK}{dt}\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2}Fv\cdot dt \quad \text{---} \quad (*)$$

$(*)$ の左辺 : $\int_{t_1}^{t_2}\frac{dK}{dt}\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2}dK = [K]_{t_1}^{t_2} = K(t_2) - K(t_1)$

($K(t)$: 時刻 t での運動エネルギー)

$(*)$ の右辺 : $\int_{t_1}^{t_2}F\underset{\dot{x}}{\underset{\shortparallel}{v}}\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2}F(t)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2}F(x)\,dx$

ここで $F(t) = \tilde{F}(x)$ とかけるとすると ($\sim$: tilder)

$\tilde{F}$: F とは異なる関数

($\tilde{F}(x(t)) = F(t)$ 時刻 t にある質点の位置 x を決めると
その時の質点に働く力が $\tilde{F}(x)$ と決まる
ような関数.)

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)\cdot\frac{dx(t)}{dt}\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2}\tilde{F}(x(t))\,\frac{dx(t)}{dt}\,dt \quad —— (**)$$

$$(**) = \int_{x(t_1)=x_1}^{x(t_2)=x_2} \tilde{F}(x)\cdot dx$$

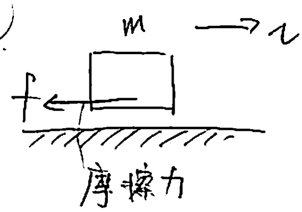
$$= \int_{x_1}^{x_2}\tilde{F}(x)\,dx = W(x_1 \to x_2) : \text{質点に行った仕事.}$$

1.1.5より $\underline{K(t_2)-K(t_1) = W(x_1 \to x_2)}$

└> 運動エネ変化分は質点にした仕事に等しい.

　└> Newton e.q. の帰結.

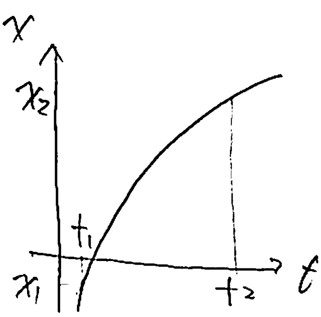
(例)



$$m\ddot{x} = -f$$

$$\ddot{x} = -\frac{f}{m}$$

$$\dot{x} = v = -\frac{f}{m}t + \underbrace{v_0}_{\text{定数}}$$



$$x = -\frac{1}{2}\frac{f}{m}t^2 + v_0 t + x_0$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}\frac{f}{m}t_1^2 + v_0 t_1 + x_0 \\ x_2 = -\frac{1}{2}\frac{f}{m}t_2^2 + v_0 t_2 + x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{f}{m}t_1 + v_0 \\ v_2 = -\frac{f}{m}t_2 + v_0 \end{cases}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}(-f)\,dx = -f(x_2 - x_1)$$

$$K(t_2) - K(t_1) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$
$$= \frac{m}{2}\left[\left(-\frac{f}{m}t_2 + v_0\right)^2 - \left(-\frac{f}{m}t_1 + v_0\right)^2\right]$$
$$= \frac{m}{2}\left[-\frac{f}{m}(t_2 + t_1) + 2v_0\right]\left(-\frac{f}{m}\right)(t_2 - t_1)$$
$$= \frac{m}{2}\left(\frac{f}{m}\right)^2(t_2^2 - t_1^2) + \frac{m}{2}\cdot 2v_0\left(-\frac{f}{m}\right)(t_2 - t_1)$$
$$= f\cdot\frac{f}{2m}(t_2^2 - t_1^2) - f\cdot v_0(t_2 - t_1)$$
$$= -f\underbrace{\left[-\frac{1}{2}\frac{f}{m}(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1)\right]}_{= x_2 - x_1}$$

$$\therefore K(t_2) - K(t_1) = -f(x_2 - x_1)$$

$$\Delta K = W$$
$$\begin{cases} \Delta K = K(t_2) - K(t_1) \\ W = W(x_1 \to x_2) \end{cases}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} = Fv : 仕事率$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}mv^2 = Fv \Longrightarrow \Delta K = W$$

$$\boxed{P \equiv mv : 運動量 \ \text{momentum}}$$

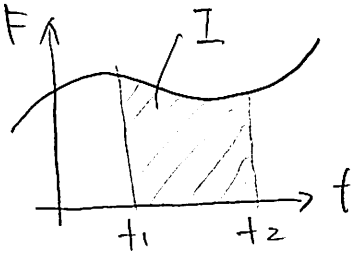
$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt}m\dot{x} = \frac{d}{dt}mv = \frac{d}{dt}P$$

$$\frac{dP}{dt} = F$$

$\Longrightarrow$ Newton e.q と同値.

つまり. 運動量の変化が力に等しい.

$t_1 \to t_2$まで積分



$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dP}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} F\, dt$$

$$= I(t_1 \to t_2)$$

$t_1 \to t_2$まで質点に働いた力の力積

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dP}{dt} dt = P(t_2) - P(t_1) = \Delta P$$

$\therefore \quad \Delta P = I$ ：運動量変化が力積に等しい.

Newton e.q. $\quad F = ma$

$$\Delta K = W \longleftrightarrow \Delta P = I$$

以上は一般の状況である

○特殊な状況

$F(t) = -\dfrac{dV(x)}{dx}$ となる $V(x)$ が存在するとき.

F：保存力 という.

どんな時でも, 同じ場所では同じ力が働く.

$x = x(t_1) = x(t_2)$ のとき.

$t_1 \neq t_2$ でも.

$$F(t_1) = F(t_2) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

例 ① 重力 ○

② 摩擦力 ×

保存力 = ポテンシャル力

前P. 続き

$$\frac{dK}{dt} = Fv = -\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{dK}{dt}\cdot dt = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt$$

$$\Delta K = -\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dx}dx$$

$$= -V(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = -(V(x_2)-V(x_1))$$

$$= -\Delta V$$

$$\therefore \Delta K = -\Delta V$$

$$\begin{cases} \Delta(K+V)=0 \\ E = K+V \quad (E:\text{力学的エネルギー}) \end{cases}$$

$$\therefore \Delta E = 0$$

以上より. 力学的エネルギーは 運動の前後で不変.

(運動の間. 不変な物理量)

・不変量 (invariant)

・保存量 (conserveal quantity)

・運動の定数 (constant of motion)