力学A

2011/4/26(火) 3限 講議レポート

提出日: 2011/5/2/(月) 3限

201110870 谷川大貴

線形常微分方程式

例）．単振動．

$F = -kx$

$m\ddot{x} = -kx$

$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$

$\left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right)$

$\ddot{x} = -\omega^2 x$

$\therefore \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

$\underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right]}_{L} x = 0$

$\Downarrow$

$L[x] = 0$

（ $x = x(t)$ に L が作用する）

L: 微分演算子

→ ⓐ 解をさがしてくる

$x = x_1(t) = \cos\omega t$ とおく．

$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = 0$

$L[x_1] = 0$　　$x_1(t) = \cos\omega t$ は解である

$x = x_2(t) = \sin\omega t$ とおく

$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = 0$

$L[x_2] = 0$

$x_2(t) = \sin\omega t$ も解である

任意の定数 C_1, C_2 に対して．

$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$ も解

$= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$

$\frac{d^2}{dt^2}(C_1x_1 + C_2x_2) + \omega^2(C_1x_1 + C_2x_2) = 0$

$L[C_1x_1 + C_2x_2] = 0$

$L[x_i] = 0$ が成り立つとき　$i = 1, 2$ ならば

$L[C_1x_1 + C_2x_2]$

$= L[\Sigma C_i x_i(t)] = 0$

$\Rightarrow$ L の線形性；

（重ねあわせの原理）

ⓐ $x = C_1x_1 + x_2C_2$ （C_1, C_2：任意定数）

↳ 任意定数を2つ含む解

$\qquad\qquad$ ‖

$\qquad$ 一般解

L：2階の微分演算子

$\left.\begin{array}{l} x_1 = \cos\omega t \\ x_2 = \sin\omega t \end{array}\right\}$ ⓐ これを足して新しい解ができるかで判断する。

線形独立でない例）$\left.\begin{array}{l} x_1 = \cos\omega t \\ x_2 = -\cos\omega t \end{array}\right)$

$\boxed{\text{公式}}$

オイラーの公式

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$$ 複素数の指数関数

・線形独立な微分方程式を用いて運動を定める例(単振動)

$\ddot{x} = -\omega^2 x$ $\qquad x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$

◦ どのような運動を表すのか?

◦ C_1, C_2 はどのように定まるのか?

→ $\boxed{\text{初期条件}}$ ・ $t=0$ での位置 x_0

・ $t=0$ での速度 v_0

$$x(0) = C_1\cos\omega 0 + C_2\sin\omega 0$$
$$= C_1 = x_0$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$$
$$v(0) = C_2\omega = v_0$$
$$\therefore C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x = x(t)$$
$$= x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

[、初期条件をみたす解
階数と同じだけの初期条件があれば
運動が定まる]

オイラーの公式

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$$

$e^{i\theta}$ ？

。 $x = x(\theta) = e^{i\theta}$ とすると. （オイラーの公式・左辺）…①

$$\frac{d}{d\theta}x = ie^{i\theta} = ix, \quad (\because (e^{ax})' = a \cdot e^{ax})$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}x = i^2 e^{i\theta} = -x$$

$$x(0) = e^{i0} = e^0 = 1$$

$$\left.\frac{d}{d\theta}e^{i\theta}\right|_{\theta=0} = ix(0) = i$$

$x = e^{i\theta}$ は $\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \omega^2\right)x = 0$ で表せる関数で

$x(0) = 0$ となり、

$\left.\frac{d}{d\theta}x\right|_{\theta=0} = i$ となる関数である。

。 一方、$y(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ （右辺）‥②

$$y(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta$$

$$\left.\frac{dy}{d\theta}\right|_{\theta=0} = i$$

① と同様. $\left.\frac{dy}{d\theta}\right|_{\theta=0} = i$ となり.

$\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \omega^2\right)y = 0$ で表せる

①,② $\Rightarrow$ $y = x$

$$\therefore e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

§複素数

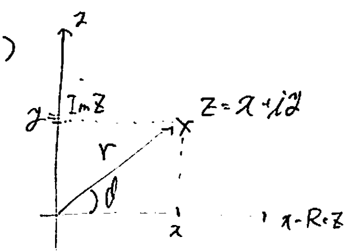
$\mathbb{C}$：複素数全体
$\mathbb{R}$：実数全体

$z \in \mathbb{C}$　, $x, y \in \mathbb{R}$
$z = x + iy$

$x = \mathrm{Re}\, z$：zの実部
$y = \mathrm{Im}\, z$：zの虚部

○複素平面

$z = x + iy \iff (x, y)$



$\bar{z} = z^* = x - iy$
（zの複素共役）

$$z^* z = (x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2$$
$$= |z|^2$$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$（zの絶対値）

$|z| = r$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= re^{i\theta}$$ ：zの極表示

$\theta = \arg z$：偏角

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 &= r_2 e^{i\theta_2} \end{aligned}\right\} \to z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta_1}$$

問題　$e^{i\alpha}e^{i\beta}$ を計算し、三角関数の加法定理を導け

$e^{i\alpha}e^{i\beta}$

オイラーの公式より

$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$

$= \cos\alpha\cdot\cos\beta + i\sin\beta\cos\alpha + i\sin\alpha\cdot\cos\beta + i^2\sin\alpha\cdot\sin\beta \quad \cdots ①$

$e^{i\alpha}e^{i\beta}$

$= e^{i(\alpha+\beta)}$

$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \quad \cdots ②$

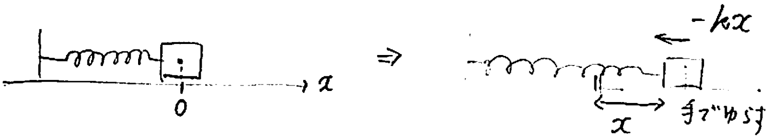
①、②より

$\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + i\sin\alpha\cdot i\sin\beta + i\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot i\sin\beta$

$$\therefore \begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + i\sin\alpha\cdot i\sin\beta \\ i\sin(\alpha+\beta) = i\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot i\sin\beta \end{cases}$$

◦微分方程式：（未知関数とその導関数の関係式）

単振動



$m\ddot{x} = -kx + f(t)$　　$f(t)$：手で加えた力

$\ddot{x} + \omega^2 x = \underbrace{\frac{1}{m} f(t)}_{\tilde{f}(t)}$　　外から加えた力

$\tilde{f}(t)$：既知

強制振動

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)x = \tilde{f}(x)$$

$L[x] = \tilde{f}$ ：既知の関数 ⇒ 非斉次の微分方程式
（定数項が0でない線形微分方程式）

$L[x] = 0$ ：斉次方程式
（定数項が0）

非斉次方程式の一般解は
斉次方程式の一般解 $\tilde{x}$ + 非斉次方程式の特解 x_0

$L[x_0] = \tilde{f}$
$L[\tilde{x}] = 0$　$\tilde{x}$：任意定数を含む

$x = x_0 + \tilde{x}$ — 任意定数とすると.

$$L[x_0 + \tilde{x}] = \underbrace{L[x_0]}_{\tilde{f}} + \underbrace{L[\tilde{x}]}_{0} = \tilde{f}$$

$f(t) = f_0 \cos \omega_0 t$ 外力

単振動 $x_0 = A\cos\omega_0 t$ としてみる

$\dot{x}_0 = -A\omega_0 \sin\omega_0 t$, $\ddot{x}_0 = -\omega_0^2 A \cos\omega_0 t = -\omega_0^2 x_0$

$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos\omega_0 t$

$(-\omega_0^2 + \omega^2) A \cos\omega_0 t = f_0 \cos\omega_0 t$

$$\therefore A = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (\omega_0 \neq \omega)$$

$x_0(t) = \dfrac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos\omega_0 t$ は

$\left(\dfrac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x = f$ の特解

$\Rightarrow$ 一般解 $x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \dfrac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos\omega_0 t$

C_1, C_2 : 初期条件から定まる ただし $\omega \neq \omega_0$

・Eulerの公式

$L[x] = 0$ $L = \dfrac{d^2}{dt^2} + \omega^2$

$x = e^{\lambda t}$ とせよ (一般的なやり方)

$\dot{x} = \lambda x$, $\ddot{x} = \lambda^2 x$

$L[e^{\lambda t}] = (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$: 特性方程式

$\lambda = \pm i\omega$

一般解として

$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ と書ける

$= C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2(\cos\omega t - i\sin\omega t)$

$= (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t$

→ この方法は、一般に適用できる

$L[x] = 0$

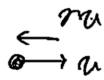
ex.) $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = 0$ ＊減衰振動

$\Rightarrow e^{\lambda t}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$

となる λ をさがす。

空気抵抗がある時の単振動

$$F = -kx \underbrace{-rv}_{\text{空気抵抗}}$$



$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

$$D = \frac{d}{dt}$$

$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$: 定数

$L[x] = 0$: 定約係数 線形 微分方程式

($e^{\lambda t}$ とする方法が有効)