力学A まとめレポート 4月26日講義分.

重ね合わせの原理.

単振動を例にして微分方程式を解く.

$F = -kx$

$m\ddot{x} = -kx$.

$\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right] x = 0 \qquad \left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right)$.

$L[x] = 0$ （Lは $\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2$ を表すものとする。微分演算子）.

$x = x_1(t) = \cos\omega t$

$x = x_2(t) = \sin\omega t$

} これらはいずれも $L[x] = 0$ を満たし、かつ線形独立である.

ここで、$L[x_i] = 0$ $(i = 1, 2, 3 \cdots)$ ならば $L[\sum c_i x_i] = 0$ ~~L[Σci~~ が成り立つ。（cは定数）これを線形性重ね合わせの原理という。.

ただし今回の場合は、$L = \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2$ （2階微分演算子）なので $i = 1, 2$ である。.

初期条件.

重ね合わせの原理により、単振動の運動方程式の解は $x = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$ であることがわかる。.
しかし、c_1, c_2 は定まっていないのでまだ運動を記述できたとは言い難い。.

そこでこの解に $t=0$ を代入してみる.

$$x(0) = C_1 \cos \omega \times 0 + C_2 \sin \omega \times 0$$
$$= C_1$$

$$\dot{x}(0) = -\omega C_1 \sin \omega \times 0 + \omega C_2 \cos \omega \times 0$$
$$= \omega C_2$$

となるので、C_1 は $x(0)$（初期位置）C_2 は $v(0)/\omega$（初速度÷ω）であることがわかる。

オイラーの公式を使った解法.

オイラーの公式によると、 $e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$

そこで $x(\theta) = e^{i\theta}$ とおくと、$\frac{d^2}{dt^2}x(\theta) = i^2 e^{i\theta} = -x(\theta)$ となるので、これも $L[x]=0$ の解として正しい.

また，初期条件は $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = i x(0) = i$.

一方, $y = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと, $y(0) = 1$ かつ $\dot{y}(0) = i$ かつ $\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \omega^2\right) y = 0$ となるので $y = x$ となる。よって

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

学籍番号 名前 DATE / / PAGE

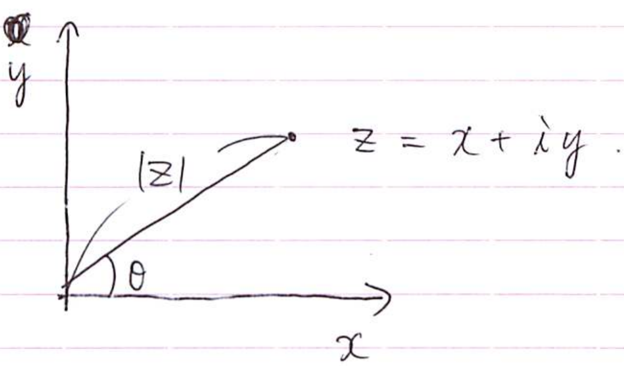
複素数と複素平面

複素数をzで書くと、$z = x + iy$ $\left(z \in \mathbb{C},\ \overset{x,y}{\cancel{a,b}} \in \mathbb{R}\right)$ という式で表せる。

また虚部を$-y$に置き換えた $x - iy$ を複素共役と言い、$\bar{z} = x - yi$ と書く。(z^*とも書く)

$$z^* z = (x - iy)(x + iy) = |z|^2 \quad \left(|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

虚部と実部を縦軸、横軸にとったものを複素平面という。



$$\left[\begin{array}{l} \theta = \arg z \\ |z| = r \end{array}\right]$$

図からわかるように、x、y はそれぞれ $r\cos\theta$、$r\sin\theta$ と書くことが出来る。

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r\cos\theta + ir\sin\theta \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

レポート問題

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta).$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\cos\beta\sin\alpha - \sin\alpha\sin\beta.$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha \overset{\sin\beta}{\cancel{\cos\beta}} + \cos\beta\sin\alpha)$$

一方で

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

$$\therefore\ e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha)$$

$x + iy = x' + iy' \Longrightarrow x = x',\ y = y'$ より

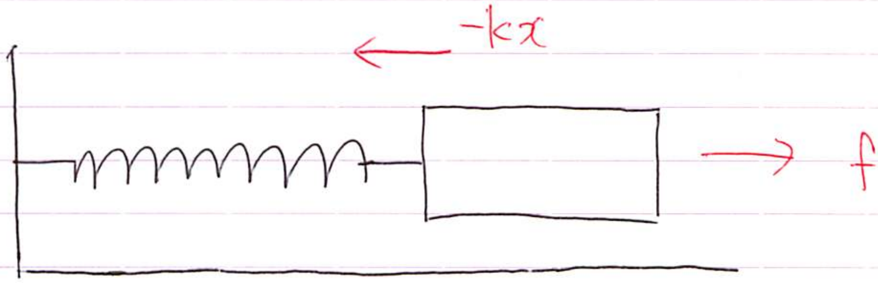
$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \end{aligned}\right\}$$ となる。.

また、β を $-\beta$ におきかえると、

$$\left.\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}\right\}$$ となる.

強制振動

今度は、単振動している物体に、外から力をかけた場合を考えてみる.



$$m\ddot{x} = -kx + f(x)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \frac{1}{m} f(x) = -\omega^2 x + \tilde{f}(t)$$

$$\therefore L[x] = \tilde{f}(t)$$

$L[x] = 0$ を斉次の微分方程式というのに対し、$L[x] = \tilde{f}(t)$ を非斉次の微分方程式という。

斉次・非斉次の一般解と特解をそれぞれ $\tilde{x}$, x_0 とする

$$L[x_0] = \tilde{f}$$

$$L[\tilde{x}] = 0$$

$$\therefore L[x_0 + \tilde{x}] = L[x_0] + L[\tilde{x}]$$

$$= \tilde{f}$$

よって、非斉次微分方程式の一般解は、
斉次微分方程式の一般解 ＋ 非斉次微分方程式の特解
となる。

発展

$L[x]=0$ を解くときは、$e^{\lambda t}=x(t)$ とおくのが一般的。

$L[e^{\lambda t}]=(\lambda^2+\omega^2)e^{\lambda t}=0$.

$\lambda^2+\omega^2=0$ （特性方程式）.

$\lambda=\pm i\omega$.

重ね合わせの原理より、一般解として.

$x=c_1e^{i\omega t}+c_2e^{-i\omega t}$ となる.

$L=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+a_{n-2}D^{n-2}+\cdots+a_1D+a_0 \quad (D=\frac{d}{dt})$
のときは $e^{\lambda t}=x(t)$ が有効.