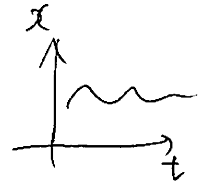
201110889
八木俊輔

Newton eq.



$x = x(t)$

$F = m\ddot{x}$ 　 $x = x(t)$ の微分を含む方程式

<u>例</u> 単振動

$F = -kx$ 　 $m\ddot{x} = -kx$

$\ddot{x} = -\omega^2 x$ 　 $\therefore \omega^2 = \frac{k}{m}$.

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

$\underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right]}_{L} x = 0$

$L[x] = 0$.

$\uparrow x = x(t)$

$x = x(t)$ にLが作用する。

L：微分演算子

解を探してくる

$x = x_1(x) = \cos \omega t$

$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega^2 x_1 = 0$.

$L[x_1] = 0$

$x = x_2(t) = \sin \omega t$

$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega^2 x_2 = 0$

$L[x_2] = 0$.

$L[x_i] = 0$ 、 $i = 1, 2$.

なら、

$L[c_1 x_1 + c_2 x_2] = L[\sum c_i x_i(t)] = 0$.

$\Longrightarrow$ Lの線形性、重ね合わせの原理

任意の定数 C_1, C_2 に対して

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$ も解!!

$$= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(C_1x_1 + C_2x_2) + \omega^2(C_1x_1 + C_2x_2) = 0$$

$$L[C_1x_1 + C_2x_2] = 0$$

$$x = C_1x_1 + C_2x_2$$

C_1, C_2 は任意定数. → 一般解.

任意定数を2つ含む解

L : 2階の微分演算子

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos\omega t \\ x_2 &= \sin\omega t \end{aligned}\right\}$$ → これを足して新しい解ができるか?

例 $$\left.\begin{aligned} x_1 &= \cos\omega t \\ x_2 &= -\cos\omega t \end{aligned}\right\}$$ → 線形独立ではない.

$\boxed{\text{公式}}$ オイラーの公式

$$e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$$ (<u>複素数</u>の指数関数)

単振動　$\ddot{x} = -\omega^2 x$.　運動？

$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$　C_1, C_2？ どのように定まるのか？

$t=0$ での場所 x_0
$t=0$ 〃 速度 v_0 } 初期条件.

$$x(0) = C_1 \overbrace{\cos\omega\cdot 0}^{=1} + C_2 \overbrace{\sin\omega\cdot 0}^{=0}$$

$$= C_1 = x_0$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t$$

$$v(0) = C_2\omega = v_0 \quad \longrightarrow \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

$$x = x(t)$$

$$= x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

初期条件をみたす解

階数と同じだけの初期条件があれば運動が定まる.

オイラーの公式

$e^{i\theta}$？　$\underbrace{(e^{ax})' = a e^{ax}}_{\text{これを信じれば…}}$

$$x = x(\theta) = e^{i\theta}$$

$$\frac{d}{d\theta}x = ie^{i\theta} = ix, \quad \frac{d^2}{d\theta^2}x = i^2 x = -x.$$

$$x(0) = e^{i\cdot 0} = e^0 = 1.$$

$$\left.\frac{d}{d\theta}e^{i\theta}\right|_{\theta=0} = i\,x(0) = i$$

$x = e^{i\theta}$ は $\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \omega^2\right)x = 0$.

関数で $x(0) = 0$, $\left.\frac{d}{d\theta}x\right|_{\theta=0} = i$ となる関数.

一方、$y=\cos\theta+i\sin\theta$

$y(0)=\cos 0+\underbrace{i\sin 0}_{0}=1$.

$\frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta+i\cos\theta$ $\quad \left.\frac{dy}{d\theta}\right|_{\theta=0}=i$

$\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+\omega^2\right)y=0 \Rightarrow y=x \Leftarrow \boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$

オイラーの法則

複素数？

$\mathbb{C}$：複素数全体 $\quad \mathbb{R}$：実数全体

$z\in\mathbb{C}$

$z=x+iy$、$x,y\in\mathbb{R}$ $\quad i^2=-1$

$x=\mathrm{Re}\,z$：zの実部、$y=\mathrm{Im}\,z$：zの虚部

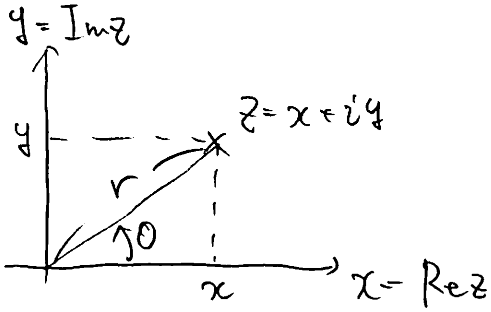
$\bar{z}=z^*=x-iy$：zの複素共役 conjugate of z

$zz^*=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$（zの絶対値）

複素平面

$z=x+iy \Leftrightarrow (x,y)$



$|z|=r$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta$

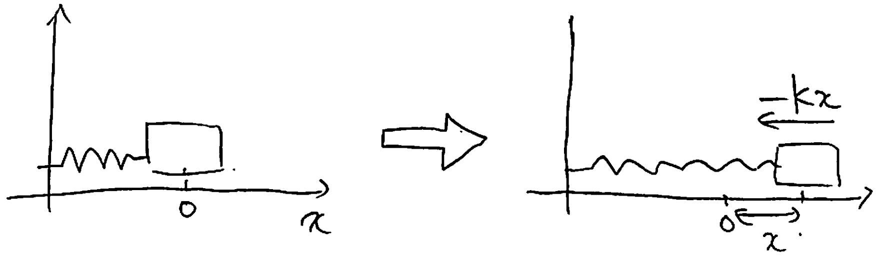
$=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=re^{i\theta}$：zの極表示

$\theta=\arg z$：偏角

※問題 $e^{i\alpha}e^{i\beta}$を計算し、三角関数の加法定理を導け。

微分方程式：単振動、



手でゆらす

$$m\ddot{x} = -kx + f(t)$$ $f(t)$：手で加えた力

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \underbrace{\frac{1}{m}f(t)}_{\tilde{f}(t)}$$ 外から加えた力（知っている）

強制振動

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)x = \tilde{f}(t)$$

$L[x] = \tilde{f}$：既知の関数　非斉次の微分方程式

$L[x] = 0$：斉次方程式

非斉次方程式の一般解は、

斉次方程式の一般解 $\tilde{x}$ ＋ 非斉次方程式の特解 x_0

$L[x_0] = \tilde{f}$、

$L[\tilde{x}] = 0$.　　$\tilde{x}$：任意定数を含む

任意定数

$x = x_0 + \tilde{x}$ とすると.

$$\underbrace{L[x_0 + \tilde{x}]}_{\tilde{f}} = \underbrace{L[x_0]}_{\tilde{f}} + \underbrace{L[\tilde{x}]}_{0}$$

$f(t) = f_0 \cos\omega_0 t$

外力

単振動 $\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos\omega_0 t$

$(-\omega_0^2 + \omega^2) A\cos\omega_0 t = f_0 \cos\omega_0 t$

$A = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$ $(\omega_0 \pm \omega)$

$x_0 = A\cos\omega_0 t$ としてみる.

$\dot{x}_0 = -A\omega_0 \sin\omega_0 t$ $\ddot{x}_0 = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t = -\omega_0^2 x_0$

$x_0(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \cos\omega_0 t$ は $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) x = f$ の特解

⇨ 一般解 $x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos\omega t$

C_1, C_2：初期条件から決まる.

Eulerの公式

$L[x] = 0$ $L = \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2$

$x = e^{\lambda t}$ とせよ.（一般的なやり方）

$\dot{x} = \lambda x$ $\ddot{x} = \lambda^2 x$

$L[e^{\lambda t}] = (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$：特性方程式 $\lambda = \pm i\omega$.

一般解として

$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ と書ける.

$= C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2(\omega\sin\omega t - i\sin\omega t)$

$= (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t$

この方法は一般に適用できる.

$L[x] = 0$ ＊減衰振動

ex) $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_2 x = 0$

$\Rightarrow e^{\lambda t} (\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$ となる λ を探す.

空気振抗がある時の単振動.

$$F = -kx - \underbrace{rv}_{\text{空気抵抗}} \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \qquad \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

$$L = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + a_{n-2}D^{n-2} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0$$

$$D = \frac{d}{dt} \qquad a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \to \text{定数}$$

$L[x] = 0$: 定数係数線形微分方程式

$e^{\lambda t}$ とする方法が有効.