201113019

No. 張(ジャン)マリ

Date 4/21 (木)

力学A

* 簡単な微分方程式

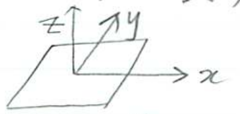
名前：独立変数 1コ

常微分方程式 $x = x(t)$

ex1) $h = h(x)$ $x \mapsto h$ $h' = \frac{dh}{dx}$

微分（常微分）独立変数は1コ

ex2) $h = h(x, y)$



$(x, y) \mapsto h$

独立変数 2コ

yは固定されていると考える　$x \rightarrow$ 微分する

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \lim_{x' \to x} \frac{h(x', y) - h(x, y)}{x' - x}$$

：偏微分

yはされてない。

例．量子力学での Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)$$

自由粒子（質量 m）偏微分方程式　　含まれる最高の微分の次数 階数

例．単振動

$F = -kx$　$-kx = m\ddot{x}$　$\ddot{x} + \frac{m}{k}x = 0$　$w^2 = \frac{m}{k}$　$w = \sqrt{\frac{m}{k}}$

$\ddot{x} + w^2 x = 0$ とみたす $x = x(t)$?

$x = \sin wt$ としてみる　$\dot{x} = w \cos wt$　$\ddot{x} = -w^2 \sin wt = -w^2 x \rightarrow \ddot{x} + w^2 x = 0$

$x = \sin wt$　1つみつけた 特解

$x = A \sin wt$ も $\ddot{x} + w^2 x = 0$ をみたす．（Aは任意の定数）（2倍がんばれば2倍成果）

$x = x(t)$ が解 $\rightarrow x = Ax$ も解

$\boxed{\text{線型性の条件 1}}$　$x = B \cos wt$　$\dot{x} = -Bw \sin wt$　$\ddot{x} = -Bw^2 \cos wt = -w^2 x$

$x = \cos wt$ も特解　$x = B \cos wt$ も解（B：定数）

$x = A \sin wt + B \cos wt$ としてみる

$\dot{x} = wA \cos wt - wB \sin wt$

$\ddot{x} = -w^2 A \sin wt - w^2 B \cos wt = -w^2 [A \sin wt + B \cos wt] = -w^2 x$

$x(t) = A \sin wt + B \cos wt$（A, Bは任意定数）

↑一般解（階数と同じ数の任意定数を含む解）

$x = A \cos(wt + \theta)$（θは定数）$\dot{x} = -Aw \sin(wt + \theta)$ $\ddot{x} = -Aw^2 \cos(wt + \theta) = -w^2 x$

$x = A \cos(wt + \theta)$（A, θは任意の定数）一般解

$A[\cos wt \cos\theta - \sin wt \sin\theta] = (A \cos\theta) \cos wt + (-A \sin\theta) \sin wt$

$\boxed{\text{線型性の条件その2}}$　$x = x_1(t)$ が解 $\cos wt$　$x = x_2(t)$ が解 $\sin wt$ $\rightarrow x = x_1 + x_2$ も解

まとめると $x = x_1(t)$, $x = x_2(t)$ が解なら C_1, C_2 を任意の定数として

$x = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$ も解となる．

$\ddot{x} + w^2 x = 0$ の線型性

線型性を持つ常微分方程式 → 線型常微分方程式