

量子ホール効果における エッジ状態と位相不変量

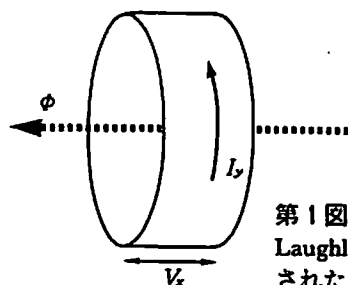
東京大学物性研究所 初貝安弘

§1 はじめに

言うまでもなく、量子力学においては古典力学と異なり、系を記述する波動関数の位相が本質的に重要である。近年、この波動関数の位相に関して、時間とともに変動する通常の波動としての位相ではなく、系の幾何学的な構造に依存した非自明な位相が、重要であることが明らかとなった。

このいわゆる幾何学的位相という概念は、Berry による、断熱変化に伴った位相(ベリー位相)の発見以来、新たな興味を持たれているものである。この幾何学的位相による効果は、その幾何学的由来のため系の微細な変化などにはよらずいろいろな意味で安定でありマクロな量子力学的效果として観測にかかることが期待されるのである。

Klitzing らにより発見された、量子ホール効果²⁾は、2次元系におけるホール伝導度が、極めて高い精度で e^2/h を単位として量子化される現象であるが、現象の、系の不純物、配置などに関する安定性など実験の複雑な物理的状況を考えたとき、その極めて高い精度の量子化はその背後にトポロジカルな理論の存在を示唆する。実際、量子ホール効果は、まさにこの種のマクロな量子力学的效果と考えられ、物性論における、幾何学的効果の典型的な例である。ここでは、この量子ホール効果を位相幾何学的側面からとらえる理論について振り返り、最近のエッジ状態を用いた位相不変量による理論まで議論したい。以下の議論では、いわゆる、整数量子ホール効果のみを議論するが、いくつかの手法により分数量子ホール効果も整数量子ホール効果の理論として、記述されるであろうと考えられることをコメントしておく。



第1図
Laughlin により初めて議論されたシリンダー上の配置。

§2 ゲージ不変性とエッジ状態

Laughlin は系のゲージ不変性を用いて、ホール伝導度が、量子化されることを一般的な視点から示した³⁾。まずこの議論を紹介しよう。物理系として、第1図のようなシリンダー状の系を考える。ここで、 B は2次元系を貫く磁場、 ϕ は、アハロノフ・ボーム効果をもたらす磁束である。この配置において、系のホール電流 I_y は、 ϕ を断熱的に $\Delta\phi$ 変化させたときのエネルギー変化 ΔE を使って、Byers-Yang の公式より⁴⁾、

$$I_y = e \frac{\Delta E}{\Delta \phi} = \sigma_{xy} V_x = -\sigma_{yx} V_x. \quad (1)$$

となる。ここで $\Delta\phi = \phi_0 = hc/e$ と磁束単位だけ変化させた場合を考えると、この変化は、系のゲージ不変性からゲージ変換で打ち消すことができるから、この断熱変化の前後で電子系の状態は同じでなければならない。よって、この断熱過程において何個か(n 個)の電子が系をよぎって移動することのみが許されるであろう。このとき V_x だけの電圧が系の幅方向にかかっているとすれば、 $\Delta E = neV_x$ であるから式(1)より

$$\sigma_{xy} = -n \frac{e^2}{h} \quad (2)$$

となり、ホール伝導度が、整数値 n に量子化されることとなる。この議論は全く一般的であるが、ホール伝導度 n は 0 かもしれず、その値はどんな整数であるか全く不定で決定できない点が欠点である。一方で Halperin は、量子ホール効果においては、系に境界が存在することが本質的であることを指摘した⁵⁾。まず磁場中の電子系には電子のサイクロトロン運動に必然的ともなった、一方向のみの運動量をもった(カイラルな)モード、エッジ状態が系の境界に存在することに注意し、連続空間においては、ホール伝導度は、フェルミ準位以下のランダウ準位の数となることを示した。

これら、Laughlin, Halperin の議論は、系が連続の空間であることを仮定した議論であったが、周期ポテンシャルを陽に取り入れた場合これらの議論はどうなるのであろうか？このような視点から格子上の問題を考えることにより量子ホール効果のトポロジカルな面が明らかとなる。次節以降での具体的な議論に入る前に、議論をはっきりさせるために格子上の電子系のハミルトニアンを述べておこう。以下次のハミルトニアンを考える。

$$H = -t \sum_{m,n} (c_{m+1,n}^\dagger e^{i\theta_{m,n}^x} c_{m,n} + c_{m,n+1}^\dagger e^{i\theta_{m,n}^y} c_{m,n}) + \text{h.c.}, \quad (3)$$

ここで、 $c_{m,n}$ は格子点 (m,n) における、生成演算子であり、 $\theta_{m,n}^x$ は磁場を表わすゲージ場であり、格子上の rotation は $\text{rot } \theta = \theta_{m,n}^x + \theta_{m+1,n}^y - \theta_{m,n+1}^x - \theta_{m,n}^y = 2\pi\phi$ であり、 ϕ は磁束単位 Φ_0 を単位としたブラケットあたりの磁束である。以下の議論では、 $\phi = p/q$ 、 p, q は互いに素の整数という状況を考える。次節からの議論では、細部は原論文を見ていただくこととして、その気持ちがわかるような説明を心がけたい。

§3 無限系, バルクな系における量子ホール効果, トポロジカル数

バルクな系での量子ホール効果においては格子上でのトポロジカルな議論が本質的である。その概略をこの節で紹介する⁶⁻¹⁰⁾。

久保公式により、相互作用のない系におけるホール伝導度は、フェルミ準位 E_F が (j -番目の) エ

ネルギーギャップにあるとき、

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2i\pi h} \sum_{E_\alpha < E_F < E_\beta} \frac{(v_y)_{\alpha\beta}(v_x)_{\beta\alpha} - (v_x)_{\alpha\beta}(v_y)_{\beta\alpha}}{(E_\alpha - E_\beta)^2} \quad (4)$$

と与えられる。この表式は多少の変形の後、

$$\sigma_{xy}^{\text{bulk}} = \sum_{E_j < E_F} \sigma_{xy}^{j, \text{bulk}} \quad (5)$$

$$\sigma_{xy}^{j, \text{bulk}} = -\frac{e^2}{h} \frac{1}{2\pi i} \iint_{T_{\text{BZ}}} dk_x dk_y [\nabla_k \times A_j^j(k)]_z \quad (6)$$

と書ける。ここに、

$$A_j^j(k) = \langle u^j(k) | \nabla_k | u^j(k) \rangle \quad (7)$$

であり、 $u_m^j(k)$ は j 番目のエネルギーバンドの q 成分のブロッホ関数であり、

$$\langle u^j(k) | u^j(k) \rangle = \sum_{m=1}^q |u_m^j(k)|^2 = 1$$

と規格化され、 $A_j^j(k)$ は、 q 成分をもった仮想的ベクトルポテンシャルと考えてよい*1。

この表式は、 j 番目のエネルギーバンドからのホール伝導度への寄与 σ_{xy}^j が、 $\nabla_k \times A_j^j(k)$ をある種の(仮想的)磁束密度と考えたとき(磁気)ブリルアン・ゾーンを貫く(仮想的)全磁束で与えられることを示している。なお、このホール伝導度は、 $A_j^j(k)$ に対するゲージ変換の自由度によらず定まることを注意しておきたい。

ここでストークスの定理をグローバルに使えば、磁気ブリルアン・ゾーンが境界を持たないトーラス*2、であることから $\sigma_{xy}^j = 0$ となるが、これは正しくなく、正確には、ブリルアン・ゾーン内には特異点が存在することを正しく取り扱わなければならない。つまり、ブリルアン・ゾーン全域で大域的に正則なゲージを選ぶことはできず、特異点からなる、ある種のポーテックスがホール伝導度を与えるのである。たとえば、具体的には、第 q 成分 $u_q(k)$ を常に実で正であるようにとることを考えよう。もしこれが、ブリルアン・ゾーン全域で許されれば、大域的に正則なゲージとなるが、一般には、 $u_q(k_0) = 0$ となる k_0 があり、この点が特異点、ポーテックスを与えることとなる。

*1 磁場の効果により、実効的に単位胞が q 倍となり、対応して、ブロッホ状態は、 q 成分をもつ。

*2 k_x, k_y 両方向での周期性からブリルアン・ゾーンは位相的にはトーラス、 $S^1 \times S^1$ となる。

ここでの状況は、Wu-Yangにより指摘された、磁気単極子の量子化の議論と極めて類似している。その類似によれば、ディラックのストリングがいまの問題でのポーテックスラインに対応し、磁気単極子の量子化の条件がホール伝導度の量子化を与えることになる。なお(6)式は、数学的には波動関数の $U(1)$ 部分からなる、ファイバーバンドルが定義するチャーン数と呼ばれる位相不変量である。このバルク系での議論により、ホール伝導度のトポロジカルな特性が明らかになり、極めて精度の高い量子化を支持する一つの根拠となる。

§4 境界を持った系、シリンダー状の系における量子ホール効果、トポロジカル数

この節では、前述のハミルトニアンをシリンダー状の境界をもつ系において考察し、エッジ状態によるホール伝導度の記述および、そのトポロジカルな性格を説明したい¹¹⁾。まず、シリンダー状の系を考察するため、波動関数 $\Psi(x, y)$ に対する境界条件として、 y 方向には周期的境界条件 $\Psi(x, y+E_y) = \Psi(x, y)$ 、 x 方向には固定端の条件 $\Psi(x=0, y) = \Psi(x=L_x, y) = 0$ を課する^{*3}。このとき、ゲージの自由度を用いて y 方向のランダウゲージ $\theta_{m,n} = 0$, $\theta_{L_x, n} = 2\pi\phi m$ ととれば、系は、 y 方向について完全に周期的であるから、フーリエ変換により、 y 方向の運動量 k_y をパラメータとする、1次元系のハミルトニアン $H(k_y)$ を得ることができる^{*4}。この1次元系に対するシュミレディンガー方程式 $H(k_y)|\Psi(k_y)\rangle = E(k_y)|\Psi(k_y)\rangle$ は、転送行列の形に、

$$\begin{pmatrix} \Psi_{m+1}(\varepsilon, k_y) \\ \Psi_m(\varepsilon, k_y) \end{pmatrix} = M_m(\varepsilon, k_y) \begin{pmatrix} \Psi_m(\varepsilon, k_y) \\ \Psi_{m-1}(\varepsilon, k_y) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$M_m(\varepsilon, k_y) = \begin{pmatrix} -\varepsilon - 2 \cos \left(k_y - 2\pi \frac{\Phi}{L_y} - 2\pi\phi m \right) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

と書ける、ここで $\varepsilon = E/t$ であり、この環元された1次元系の系における、境界条件は、 $\Psi_0 = \Psi_L = 0$ である。

以下しばらく k_y を固定して、この1次元系を考察する。この1次元系においては、エッジ状態は系の境界に局在する、束縛状態とみなせる。一般にレビソンの定理、フリーデルの総和則などの議論にみられるように、束縛状態の情報は、散乱状態の波動関数を複素エネルギーに解析接続することにより得られることが多い。この一般的な方針に従い、まず散乱状態、つまり、エネルギーバンド(連続スペクトルを持つ周期系)を考えよう。この周期系ではブラケットあたりの磁束が p/q であることに対応して、ランダウ・ゲージのもとでは、1次元系の単位胞が q 倍になっており、エネルギー・スペクトルは q 個のエネルギー・バンド

$$\varepsilon \in [\lambda_1, \lambda_2], \dots, [\lambda_{2q-1}, \lambda_{2q}], \dots, [\lambda_{2q-1}, \lambda_{2q}], \quad (10)$$

からなる。さらにブロッホの定理は、 $M(\varepsilon) = \prod_{m=1}^q M_m(\varepsilon)$ が、絶対値1の固有値 $\rho(\varepsilon)$ を持つことを要請し、 $\rho(\varepsilon)$ は、固有方程式

$$\rho(\varepsilon)^2 - \Delta(\varepsilon)\rho(\varepsilon) + 1 = 0, \quad \Delta(\varepsilon) = \text{Tr } M \quad (11)$$

を満たす。なお、 $\det M_m(\varepsilon) = 1$ より、 $\det M(\varepsilon) = 1$ である。ここに、 $\Psi_1 = 1$ との規格化条件をおけばすべての波動関数は、転送行列により陽に定まることを注意しておく^{*5}。

さて、エッジ状態を考察するため連続スペクトルを与える周期系の固有エネルギー ε を複素エネルギー z に解析接続しよう。(11)式よりわかるように、系の複素エネルギー面は複素関数

$$\omega = \sqrt{\Delta(z)^2 - 4} = \sqrt{(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_{2q-1})(z - \lambda_{2q})} \quad (12)$$

のリーマン面により定まる。この関数のブランチ

^{*3} 技術的理由により、 L_x は q の倍数であると仮定する(commensurate 条件)。

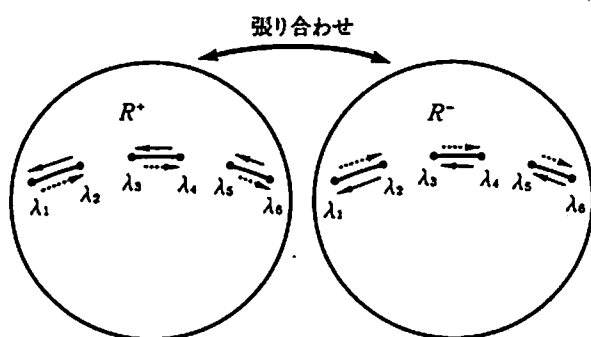
^{*4} 系を貫くアハロフ・ボーム磁束 Φ を (Φ_0) を単位として) 含めたときは、 $k_y + 2\pi(\Phi/L_y)$ がパラメータとなる。以下の表式では、このフラックスも適宜、含めておく。

^{*5} 当然この波動関数は、通常の意味で規格化されていない。

は、(10) 式で定まる g 個のエネルギーバンドを
 ブランチカットとして 2 枚の複素平面^{*6} R^+ およ
 び R^- を第 2 図の矢印の向きに沿って張り合わ
 せたものとなる^{*7,13}。この複素エネルギー面(リ
 ーマン面 $\Sigma_g(k_f)$)は、図よりわかるように、ブラ
 ンチカットが、 g 個であったことに対応して g
 ($=q-1$) 個穴のあいた浮き輪と同相であり、エネ
 ルギーギャップの数 g は、リーマン面の種数と呼
 ばれる。概念的に言ってエネルギーギャップは、
 リーマン面の穴の内側の閉曲線に、エネルギーバ
 ンドは、面上の第 3 図のような閉曲線に対応す
 ると考えて良い。

以上の準備のもと、次の事実が証明される¹²⁾。

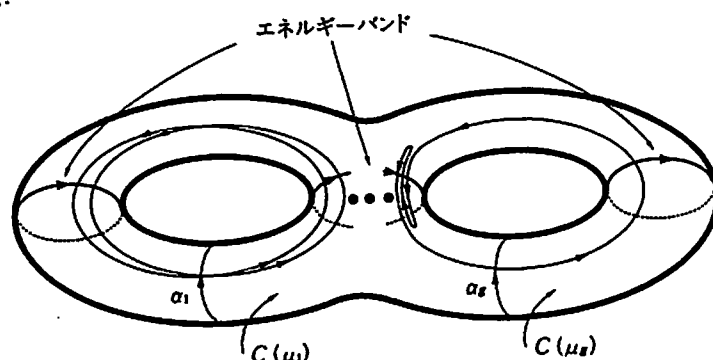
- 1) エッジ状態のエネルギーは実であり系の大き
 さによらず、 g 個のエネルギーギャップの中に
 必ず一つそして一つずつ存在する。また、エッ
 ジ状態以外の固有値は、エネルギーバンドの領
 域に、系の大きさを大きくしていったとき収束
 する^{*8}。
- 2) j -番目のギャップにあるエッジ状態の波動関
 数を、その散乱状態から解析接続すれば、その
 固有エネルギー μ_j はリーマン面上“穴の内面
 に”一つずつあり、また、あるブランチの決め



第 2 図 二つのブランチを持つ複素関数、 $\omega = [(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_{2g})]^{1/2}$ のリーマン面の構成法。

第 3 図

ブラケット当たりの磁束が、 $\phi = p/q$ であ
 る場合のブロッホ関数の複素エネルギー面
 (リーマン面)。種数 g は、エネルギーギャ
 ップの数で与えられる。 $C(\mu_j)$ は、エッジ
 状態の波動関数を解析接続により、構成し
 たときのエネルギー μ_j の軌跡であり、ブ
 リルアン・ゾーンがコンパクトであること
 に対応して、閉曲線となる。



方のもとで次の対応が成り立つ。

エッジ状態は、左端($x \approx 1$) (右端($x \approx L_x$))に局
 在している \rightarrow 対応するエネルギー μ_j は R^+ (R^-)
 上にある。

- 3) μ_j で $\Psi_q(\varepsilon = \mu_j) = 0$ である^{*9}。

この考察により、エッジ状態のエネルギーの複
 素エネルギー面上での位置を知れば、その波動関
 数が、シリンダーの左右 2 つある境界のうちどち
 らの境界に局在しているかがわかることになる。

ここまでの議論では、 y 方向の運動量は、固定
 して考えていたが、この運動量を変化させること
 を考えよう。この変化の過程でリーマン面 $\Sigma_g(k_f)$
 の種数が変化しなければ、つまり、物理的には、
 2 次元の問題として、エネルギーギャップが開い
 ていれば、位相的には、すべてのリーマン面を同
 一視できる。このとき、 k_f も格子の周期性より、
 ブリルアン・ゾーンを動くため $k_f \in [0, 2\pi]$ であり、
 0 と 2π を同一視しなければならないことに注意
 すれば、リーマン面上で、エッジ状態のエネルギ
 ー μ_j は、それぞれ向きのついた閉曲線 $C(\mu_j)$ を
 つくることがわかる。

これらの閉曲線は、それぞれ各エネルギーギャ
 ップすなわちリーマン面の“穴”の周囲を囲むか
 らその回転数が定まり、これはリーマン面上の整
 数の位相不変量となる。なおこの回転数は、第 3
 図のような標準的な閉曲線 α_j を面上にとってお

^{*6} ∞ 点を付け加えコンパクト化した、リーマン球を考え
 る。

^{*7} 以下の操作を想像してみたい。まず、ブランチカッ
 トを延ばして引き出しチューブとし、一つのリーマン球を手
 前にもってきてその裏側で 2 つのチューブを張り合わせ
 る。

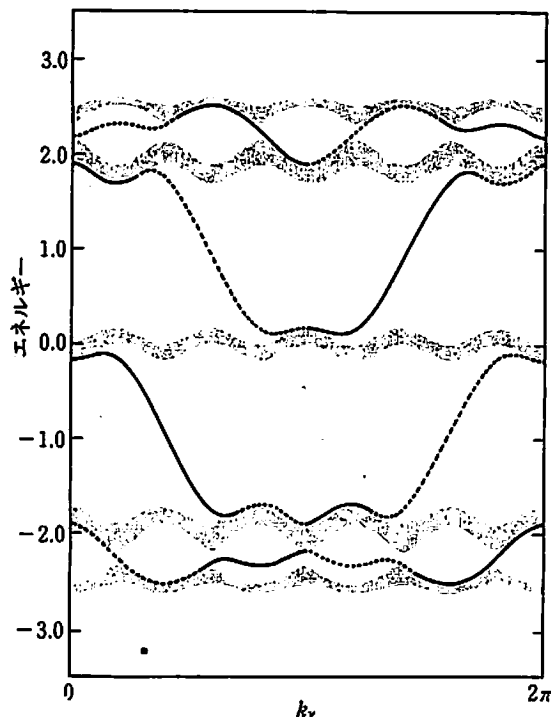
^{*8} 有限系であるからすべての固有値は離散的である。

^{*9} 実は、 $\Psi_q(\varepsilon = \mu_j) = 0$, $n = 0, 1, \dots, L_x/q$ である。

けば、エッジ状態の軌跡 $C(\mu_j)$ と α_j との符号つき交点数で与えられることもわかるであろう。

ここで、いくつかの具体的な例を示そう。第4図は、 $\phi=2/5$ の場合で影をつけた領域がエネルギーバンド、実線および破線は、エッジ状態のエネルギーを示す。 k_y を固定した、つまり k_x 一定の縦線での図の断面が一つのリーマン面を定めることに注意して欲しい。実線は、対応するエッジ状態がシリンダーの左端に局在していること、および、そのエネルギーがリーマン面の R^+ 側にあることを示し、破線は、逆に対応するエッジ状態がシリンダーの右端に局在していること、および、そのエネルギーがリーマン面の R^- 側にあることを示す。

この図より閉曲線 $C(\mu_j)$ の動きを読みとれる。たとえば、下から2番目のギャップのなかにあるエッジ状態は、リーマン面の2番目の“穴”の周りを一回、回転することが見てとれよう。興味深いことにその動きは、必ずしも単調でなく行きつもどりつしていることがわかる*10。重要なこと



第4図

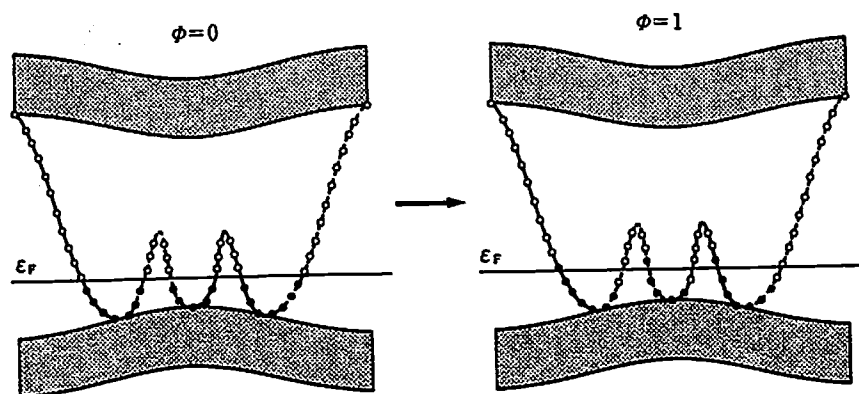
十分に大きなシリンダーの系におけるエネルギースペクトル。ブラケット当たりの磁束は、 $\phi=2/5$ である。それぞれのエネルギーギャップに存在するエッジ状態の回転数は、図より、 $I(C(\mu_1))=-2$ 、 $I(C(\mu_2))=1$ 、 $I(C(\mu_3))=-1$ 、および $I(C(T_4))=2$ と読みとれる。

は、エネルギーギャップが閉じない限り、つまりリーマン面の位相が変化しない限り、いかなる動きをしてもその回転数は、変化できない点にある。これがこれから説明するようにホール伝導度の位相的性格に対応する。

さて、ホール伝導度を Byers-Yang の公式により計算しよう。今、実は y 方向の系のサイズは、有限であるので、 k_y は、 $k_y=2\pi n/L_y$ 、 $n=1, \dots, L_y$ と離散的であり、上述の1次元系は、 $k_y+2\pi\phi/L_y$ をパラメータとしていることに注意する。アハロノフ-ボーム-フラックス ϕ を $0 \rightarrow 1$ と磁束単位だけ変えたとき、この変化がゲージ変換であるため1粒子のスペクトルは、完全に不変であり、1粒子状態は、隣接する運動量の点に移る。

このとき、もしフェルミ・エネルギーがバルクなエネルギーギャップのなかにあれば、ブリルアン・ゾーンがコンパクトであることより、バルクな状態は、完全にもとの状態に戻る。しかし、エッジ状態は、第5図よりわかるように常に、フェルミ・エネルギー上にもいくつか状態が存在し完全にはもとの状態に戻らず、状態が変化する。たとえば、第5図の例では、この変化の前後で、破線上の状態が2個、実線上の状態が1個減り、また破線上の状態が1個、実線上の状態が2個増えたことが読み取れる。つまり、左端から右端に2個、右端から左端に1個、ネットでは、左から右へ、1つの状態が移ったことになる。つまり、最初に考察した Laughlin の議論では、不定であった移動した電子数が“1”と確定したことになる。このとき、このエネルギーギャップにあるエッジ状態のリーマン面上での回転数が1であったことを思い出しておこう。この例より、一般にはアハロノフ-ボーム-フラックスを磁束単位だけ断熱的に変える過程において移動する電子数は、対応するエッジ状態の回転数 $I(C_j, \alpha_j)$ で与えられることもほぼ明らかであろう。つまり、Laughlin の議論により、 j 番目のエネルギーギャップにフェルミ・エネルギーがある場合のホール伝導度は、エッジ状態の回転数により定まり、

*10 これはあるエネルギーでのエッジ状態が異なる符号の運動量を持ち複数個あることに対応する。



第5図 ゲージ変換とエッジ状態およびバルク状態。アハロノフ・ボーム磁束を磁束単位変えたとき1粒子状態は、隣接する運動量の点に移る。

$$\sigma_y^{\text{edge}} = -I(C_j, \alpha_j) \frac{e^2}{h} \quad (14)$$

となる。この結果により、ホール伝導度を、エッジ状態に関連する新たな位相不変量により表現できたことになる。

なお、エッジ状態は、系の境界に、指数関数的に局在するモードであり、エッジ状態間の散乱の確率は、シリンダーの幅について、指数関数的に減少するため、マクロスコピックな系では0であると考えてよい。このエッジ状態間の散乱を無視できる範囲では、エッジ状態は、カイラルであり、局在の影響を受けない。これもまた、量子ホール伝導度の不純物に対する、安定性を支持する結果である^{*11}。

§5 二つのトポロジカル数の関係、バルクかエッジか？

前の2つの節でホール伝導度に対する位相幾何学的理論として、境界のないバルクな系での理論と境界をもつ系でエッジ状態を用いた理論との二つを紹介した。この節では、その間のお互いの関係について議論したい¹²⁾。

第3図に示したようにy方向の運動量を固定したとき、エネルギーバンドは、リーマン面 $\Sigma_g(k_y)$ 上の g 個のループとなり、このループは、x方向

の運動量 k_x でパラメータ表示される。 k_y も周期性から本質的に g 個のサークル $S_j^1, j=1, \dots, g$ 上を動くことを思いだすと、2次元の問題としての全空間 $\Sigma_g \times S^1$ において2次元のエネルギーバンドは g 個のトーラス $S_j^1 \times S^1, j=1, \dots, g$ として切り出されてくることがわかるであろう。この g 個のトーラスが、磁気ブリルアン・ゾーン上での g 個のエネルギーバンドに対応する。

ここで実空間での波動関数 $\Psi_j(k_y)$ とバルクな場合の公式での2次元系でのブロッホ関数 $u_j(k_x, k_y)$ は $\Psi_j(k_x, k_y) = \rho(k_x, k_y) u_j(k_x, k_y)$, $\rho(k_x, k_y) = e^{ik_y x}$ で結びついている。以前に示したゲージの選び方によれば、 $u_q(k_0) = 0$ となる k_0 が特異点を与えたが、この点ではまた $\Psi_q(k_x, k_y) = 0$ となっている。ここで、エッジ状態についての結果を使うと、エッジ状態の軌跡 $C(\mu_j)$ がエネルギーバンドと交差する所で、前述の磁気ブリルアン・ゾーン上でのボーテックスが与えられることがわかる。言い換えると、エッジ状態は、一般にボーテックスラインを与え、ブロッホの条件を満たすとき(普通の散乱理論でのオンシェルの条件のとき)、物理的な、ボーテックスをブリルアン・ゾーンで与えることとなる。またブリルアン・ゾーン上でのボーテックスは、すべてこのエッジ状態からなるボーテックスで与えられ、すべて1次元の問題としては、バンド端にあることもわかる。更に、ボーテックスの渦度に関しても、ボーテックス近傍で、波動関数を陽に、展開し、渦度を求められる。その結果、 j 番目のエネルギーバンドに関して高エネルギーバンド端での渦度の和は $I(C_j, \alpha_j)$ 、低

*11 実際の系では、不純物効果などによりこれらのトポロジカルな議論が文字通りそのまま成立するわけではないが、エッジ状態による議論は特に、そのカイラルな性格のため、ある意味での固定点としてのモデルとしての意味があると考えている。

エネルギーバンド端での渦度の和は $-I(C_j, \alpha_j)$ と計算され、ホール伝導度は、

$$\sigma_{xy}^j = -[I(C_j, \alpha_j) - I(C_{j-1}, \alpha_{j-1})] \frac{e^2}{h} \quad (15)$$

となる。ここに一見全く異なる、2つの位相不変量の間の関係を確立できた。これより、

$$\sigma_{xy}^{j, \text{bulk}} = \sigma_{xy}^{j, \text{edge}} \quad (16)$$

すなわちホール伝導度は、バルクな状態から計算しても、エッジ状態を用いて計算しても、等しい値となる。

物理的には、バルクな系でのホール伝導度を与える、磁気ブリルアン・ゾーンでのポーテックスは、バルクなエネルギーバンドにエネルギー的に縮退したエッジ状態により与えられる。このとき左右のエッジ状態も、例外的に縮退し、それ以外の場合、エッジ状態は、ある種のポーテックスラインを与えることとなる。

最後に、ここで、日頃、量子ホール効果、特に

そのトポロジカルな側面、エッジ状態などに関して議論していただいています甲元眞人氏、永長直人氏に感謝したいと思います。

〔参考文献〕

- 1) M. V. Berry: Proc. Roy. Soc. London A392 (1984) 45.
- 2) K. V. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper: Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 494.
- 3) R. B. Laughlin: Phys. Rev. B23 (1981) 5632.
- 4) N. Byers and C. N. Yang: Phys. Rev. Lett. 7 (1961) 46.
- 5) B. I. Halperin: Phys. Rev. B25 (1982) 2185.
- 6) D. J. Thouless, M. Kohmoto, P. Nightingale and M. den Nijs: Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 405.
- 7) J. Avron, R. Seiler and B. Simon: Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 51.
- 8) M. Kohmoto: Ann. Phys. (N.Y.) 160 (1985) 355.
- 9) M. Kohmoto: Phys. Rev. B39 (1989) 11943.
- 10) Y. Hatsugai and M. Kohmoto: Phys. Rev. B42 (1990) 8282.
- 11) Y. Hatsugai: Phys. Rev. B48 (1993) 11851.
- 12) Y. Hatsugai: Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 3697.
- 13) N. Toda: *Theory of Nonlinear Lattices* (Springer-Verlag, 1981);
D. Mumford: *Tata Lectures on Theta I, II* (Birkhäuser, Boston, 1983).