量子力学3　第15回講義まとめ

201310851　金杉　翔太

2つの独立な角運動量 $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2$ を合成すると、

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}_1 + \mathbb{J}_2 = \mathbb{J}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \mathbb{J}_2$$

と表現できる。ここで、以下の性質が成り立つ。

$$[J_i^\alpha, J_j^\beta] = \delta_{ij}\, i\hbar\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} J_i^\gamma \qquad (i,j = 1,2 \;\; \alpha,\beta,\gamma = x,y,z)$$

$$J_i^2 |j_i, m_i\rangle = \hbar j_i (j_i+1) |j_i, m_i\rangle$$

$$J_i^z |j_i, m_i\rangle = \hbar m_i |j_i, m_i\rangle$$

また、$|j, m\rangle = |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$ とすれば以下のようになる。

$$[J^\alpha, J^\beta] = i\hbar\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} J^\gamma$$

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar j (j+1) |j, m\rangle$$

$$J^z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$$

ここで、

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j, m\rangle$$

$$|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \sum_{j, m} |j, m\rangle \langle j, m | j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

と書けるので、

$$\sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1, j_2, m_2| = 1$$

$$\sum_{j, m} |j, m\rangle \langle j, m| = 1$$

という完全性の条件が成り立っていることが分かる。また、

$$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_1 m_1', j_2 m_2'\rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

$$\langle j, m | j', m'\rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

という正規直交性も成り立っている。ここで、

$$j = j_1 + j_2,\ j_1 + j_2 - 1,\ \cdots,\ |j_1 - j_2|$$

$$m = -j,\ -j+1,\ \cdots,\ j-1,\ j$$

である。

☆ Irreducible tensor operator（既約テンソル演算子）

$$[J^\alpha, J^\beta] = i\hbar\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} J^\gamma \qquad (\alpha,\beta,\gamma = x,y,z)$$

が成り立つ角運動量 $\mathbb{J} = (J_x, J_y, J_z)$ に対して、$J_\pm = J_x \pm i J_y$ とすると

$$\left.\begin{aligned}
[J_+, J_+] &= 0 \\
[J_+, J_z] &= -\hbar J_+ \\
[J_+, J_-] &= 2\hbar J_z \\
[J_-, J_+] &= -2\hbar J_z \\
[J_-, J_z] &= \hbar J_- \\
[J_-, J_-] &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

という関係が成り立つ。

$Y_{l,m}$を球面調和関数とすると、

$$L_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm}$$
$$L_\pm Y_{lm} = \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\, Y_{l,m\pm 1}$$

となるので、fを任意の関数とすると、

$$L_z(Y_{lm} f) = (L_z Y_{lm}) f + Y_{lm}(L_z f)$$
$$= \hbar m f + Y_{lm}(L_z f)$$
$$\therefore L_z Y_{lm} f - Y_{lm} L_z f = \hbar m f$$
$$\therefore [L_z, Y_{lm}] f = \hbar m f$$
$$\therefore [L_z, Y_{l,m}] = \hbar m \qquad (2)$$

同様にして、

$$L_\pm(Y_{lm} f) = (L_\pm Y_{lm}) f + Y_{lm}(L_\pm f)$$
$$= \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\, Y_{l,m\pm1} f + Y_{lm} L_\pm f$$
$$\therefore [L_\pm, Y_{l,m}] = \hbar\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)} \qquad (3)$$

(3)式より、$l=1$とすれば、

$$\left.\begin{aligned}
&[L_+, Y_{1,1}] = 0\\
&[L_+, Y_{1,0}] = \hbar\sqrt{2}\, Y_{1,1}\\
&[L_+, Y_{1,-1}] = \hbar\sqrt{2}\, Y_{1,0}\\
&[L_-, Y_{1,1}] = \hbar\sqrt{2}\, Y_{1,0}\\
&[L_-, Y_{1,0}] = \hbar\sqrt{2}\, Y_{1,-1}\\
&[L_-, Y_{1,-1}] = 0
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

となり、(1)と(4)を比較すれば、

$$Y_{1,1} \leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} L_+ ,\quad Y_{1,0} \leftrightarrow L_z ,\quad Y_{1,-1} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} L_- \qquad (5)$$

と対応させれば、Y_{lm}がLと類似の交換子を持つことが分かる。
上の例をより一般化して、

$$\left.\begin{aligned}
&[J_z, T^{(k)}_q] = \hbar q T^{(k)}_q\\
&[J_\pm, T^{(k)}_q] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\, T^{(k)}_{q\pm1}\\
&k = -q, -q+1, \dots, q-1, q
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

という関係が成り立つ時、$T^{(k)}_q$をk階既約テンソル演算子と呼ぶ。
$Y_{l,m}$においては、$l \leftrightarrow k$, $m \leftrightarrow q$という対応がある。

$$[L_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k \qquad (7)$$

(7)式が成り立つようなベクトル演算子 $\mathbb{V} = (V_x, V_y, V_z)$ を考えると、(5)と(6)の関係から、$Y_{1,m}$を1階既約テンソル演算子として用いて、

$$T^{(1)}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y)$$
$$T^{(1)}_0 = V_z$$
$$T^{(1)}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y)$$

とすればうまく$\mathbb{V}$を作ることができる。