量子力学3　理工学群 物理学類 3年　201310875　山口 裕佳　15.6.30

（復習は省略）

☆ Irreducible tenser operator
既約テンソル演算子

一般の角運動量 $[J^\alpha, J^\beta] = i\hbar\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}J^\gamma$
(の代数)　$J^\pm = J_x \pm iJ_y$

$[J_+, J_+] = 0$
$[J_+, J_z] = -\hbar J_+$
$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z$
$[J_-, J_z] = \hbar J_-$
$[J_-, J_-] = 0$
$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j\,m\pm1\rangle$

$Y_{\ell m}$: Spherical harmonics（球面調和関数）

$L_z Y_{\ell m} = \hbar m Y_{\ell m}$
$L_\pm Y_{\ell m} = \hbar\sqrt{(\ell\mp m)(\ell\pm m+1)}\,Y_{\ell m\pm1}$

$L_z(Y_{\ell m}f) = (L_z Y_{\ell m})f + Y_{\ell m}(L_z f)$
$= \hbar m Y_{\ell m} f + Y_{\ell m} L_z f$

移項する
$L_z Y_{\ell m} f - Y_{\ell m} L_z f = \hbar m Y_{\ell m} f$
$\Leftrightarrow\ [L_z, Y_{\ell m}]f = \hbar m Y_{\ell m}$
$\therefore\ [L_z, Y_{\ell m}] = \hbar m$

$L_\pm(Y_{\ell m} f) = L_\pm Y_{\ell m} f + Y_{\ell m} L_\pm f$
$= \hbar\sqrt{(\ell\mp m)(\ell\pm m+1)}\,Y_{m\pm1}f + Y_{\ell m}L_\pm f$
$\Leftrightarrow\ [L_\pm, Y_{\ell m}]f = \hbar\sqrt{(\ell\mp m)(\ell\pm m+1)}\,Y_{\ell m\pm1}$
$\therefore\ [L_\pm, Y_{\ell m}] = \hbar\sqrt{(\ell\mp m)(\ell\pm m+1)}$

$[L_+, Y_{11}] = 0$
$[L_+, Y_{10}] = \hbar\sqrt{2}\,Y_{10}$
$[L_+, Y_{1-1}] = \hbar\sqrt{2}\,Y_0$
$[L_-, Y_{10}] = \hbar\sqrt{2}\,Y_{1-1}$
$[L_-, Y_{1-1}] = 0$

これを角運動量の代数と比較
（$[J_{z,\pm}, \circledcirc]$ の ◎ の部分）

$Y_{11} \rightleftarrows -\frac{1}{\sqrt{2}}L_+$
$Y_{10} \rightleftarrows J_z$
$Y_{1-1} \rightleftarrows \frac{1}{\sqrt{2}}L_-$

$Y_{\ell m} \sim L$　Lと類似の演算子

球面調和関数を一般化　$T_q^{(k)}$
$q = -k, \cdots k$ $(2k+1コ)$

$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar T_q^{(k)}$
$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\,T_q^{(k)}$　$k \leftrightarrow j$, $q \leftrightarrow m$

$T_q^{(k)}$　k階既約テンソル演算子
irreducible tenser operator for rank k

$\vec{r}, \vec{p}, \vec{L}$: vector operator $\vec{V}$

一般に $[V_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$

$T_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y)$
$T_0^{(1)} = V_z$
$T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y)$

とすれば、1階の既約テンソル演算子となることを示す。