NO.

DATE

# 量子力学3第15回授業まとめ 201310860 佐藤光耀至

## ⑩ 角運動量の合成の総括

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = 1\oplus 0 \quad , \quad \frac{1}{2}\otimes 1 = \frac{1}{2}\oplus\frac{3}{2} \quad , \quad 1\otimes 1 = 2\oplus 1\oplus 0$$

積表現(クロネッカー積)

$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ において.

$$[J_i^\alpha , J_j^\beta] = \delta_{ij}\, i\hbar\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} J_i^\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{J}_i^{\,2} |j_i, m_i\rangle = \hbar^2 j_i(j_i+1) |j_i, m_i\rangle \\ J_i^z |j_i, m_i\rangle = \hbar m |j_i, m_i\rangle \end{cases}$$

$$[J^\alpha , J^\beta] = i\hbar\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} J^\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{J}^{\,2} |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \\ J^z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle \end{cases}$$

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$$

$$\{|j,m\rangle\} \quad \{|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle\}$$

基底変換

CG係数

$$|j,m\rangle = \underbrace{\sum_{m_1,m_2} |j_1, m_1, j_2, m_2\rangle\langle j_1, m_1, j_2, m_2|}_{=1\ (完全性)} j, m\rangle$$

CG係数

$$|j_1, m_1, j_2, m_2\rangle = \underbrace{\sum_{j,m} |j, m\rangle\langle j, m|}_{=1\ (完全性)} j_1, m_1, j_2, m_2\rangle$$

$$\langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, m_1', j_2, m_2'\rangle = \langle j_1, m_1 | j_1, m_1'\rangle\langle j_2, m_2 | j_2, m_2'\rangle = \delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}$$

$$\langle j, m | j', m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$$

NO.

DATE . .

## ⑪ 既約テンソル演算子 Irreducible tensor operator

球面調和関数 $Y_{\ell m}$ にある関数 $f$ をかけて、$L_z$ と $L_\pm$ を作用させる。

$$\begin{cases} J_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle \\ J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|j,m\pm1\rangle \end{cases}$$

を思い出して、

$$\begin{cases} L_z Y_{\ell m} = \hbar m Y_{\ell m} \\ L_\pm Y_{\ell m} = \hbar\sqrt{(\ell\mp m)(\ell\pm m+1)}\,Y_{\ell m\pm1} \end{cases}$$

これより

$$L_z(Y_{\ell m}f) = (L_z Y_{\ell m})f + Y_{\ell m}(L_z f)$$
$$= \hbar m Y_{\ell m} f + Y_{\ell m}(L_z f)$$
$$\therefore [L_z, Y_{\ell m}] = \hbar m Y_{\ell m}$$

$$L_\pm(Y_{\ell m}f) = (L_\pm Y_{\ell m})f + Y_{\ell m}(L_\pm f)$$
$$= \hbar\sqrt{(\ell\mp m)(\ell\pm m+1)}\,Y_{\ell m\pm1} f + Y_{\ell m}(L_\pm f)$$
$$\therefore [L_\pm, Y_{\ell m}] = \hbar\sqrt{(\ell\mp m)(\ell\pm m+1)}\,Y_{\ell m\pm1}$$

今、$\ell=1$ とすると

$$[L_\pm, Y_{1m}] = \hbar\sqrt{(1\mp m)(2\pm m)}\,Y_{1m\pm1}$$

これより

$$\boxed{\begin{array}{ll} [L_+, Y_{11}] = 0 & [L_-, Y_{11}] = \hbar\sqrt{2}\,Y_{10} \\ [L_+, Y_{10}] = \hbar\sqrt{2}\,Y_{11} & [L_-, Y_{10}] = \hbar\sqrt{2}\,Y_{1-1} \\ [L_+, Y_{1-1}] = \hbar\sqrt{2}\,Y_{10} & [L_-, Y_{1-1}] = 0 \end{array}}$$ ＊1

ここで、$[J^\alpha, J^\beta] = i\hbar\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}J^\gamma$をみたす角運動量$\vec{J}$について

$$\boxed{\begin{array}{ll} [J_+, J_+] = 0 & [J_-, J_+] = -2\hbar J_z \\ [J_+, J_z] = -\hbar J_+ & [J_-, J_z] = \hbar J_- \\ [J_+, J_-] = 2\hbar J_z & [J_-, J_-] = 0 \end{array}}$$ ※2

※1と※2を比較することで、以下の対応関係がみられる。

$$Y_{11} \rightleftarrows -\frac{1}{\sqrt{2}}J_+ , \quad Y_{10} \rightleftarrows J_z , \quad Y_{1-1} \rightleftarrows \frac{1}{\sqrt{2}}J_-$$

ここで、球面調和関数$Y_{lm}$を一般化する。$k$を0以上の整数、$T_q^{(k)}$; $q = -k, -k+1, \cdots, k-1, k$という$2k+1$個の演算子を考える。

$$\begin{cases} [J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)} \\ [J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\, T_{q\pm1}^{(k)} \end{cases}$$

上の関係式をみたす$T_q^{(k)}$を(k階)既約テンソル演算子という。

($Y_{lm} \leftrightarrow T_q^{(k)}$, $l \leftrightarrow k$, $m \leftrightarrow q$の対応がある)

以前、軌道角運動量演算子$\vec{L}$に対し、

$$[L_i, V_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$$

をみたす$\vec{V}$をベクトル演算子と言った。上の関係式は座標$\vec{r}$と運動量$\vec{p}$, 角運動量$\vec{J}$がみたすことは確認した。

ここで、
$$\begin{cases} T_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y) \\ T_0^{(1)} = V_z \\ T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y) \end{cases}$$

とすると、これは1階の既約テンソル演算子となる。