201110851

NO. 九島 槙之介

DATE 7 . 17 .

3D rotation

$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_\alpha(\hat{z}) R_\beta(\hat{y}) R_\gamma(\hat{z})$

○ α, β, γ : Euler angle（オイラー角）

○ $R_\theta(\hat{n})$: $\hat{n}$軸まわりのθ回転

ψ : wave function に対して $R : \psi \mapsto R\psi$

$[H,R]=0$, $\psi_1, \cdots, \psi_d$: d fold degenerated（d重に縮退したすべての状態） (complete)

$H|\psi_i\rangle = |\psi_i\rangle E$, $i = 1 \sim d$ $(\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{i,j})$ だとして、

$R H|\psi_i\rangle = R|\psi_i\rangle E \iff H(R|\psi_i\rangle) = (R|\psi_i\rangle)E$

$\therefore$ $R|\psi_i\rangle$: eigen state（固有状態） with energy E

ここで $R|\psi_i\rangle = |\psi_j\rangle D_{ji}(R)$ liner combination（線形結合） だとすると

↖ coef 係数

$R|\psi_i\rangle = |\psi_j\rangle D_{ji}(R)$

$\iff R(|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_d\rangle) = (|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_d\rangle)\, \mathbb{D}(R)$ ← d×d 行列

$\left(\psi \equiv (|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_d\rangle) \text{ で}\right)$

$\iff R\psi = \psi\, \mathbb{D}(R)$

ここで R: unitary なので $R^\dagger = R^{-1}$, $R^\dagger R = 1$ を踏まえると、

$(R\psi)^\dagger (R\psi) = \psi^\dagger R^\dagger R \psi = \psi^\dagger \psi = \begin{pmatrix} \langle\psi_1| \\ \vdots \\ \langle\psi_d| \end{pmatrix} (|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_d\rangle) = E_d$

$\|$

$(\psi\mathbb{D})^\dagger (\psi\mathbb{D}) = \mathbb{D}^\dagger \psi^\dagger \psi \mathbb{D} = \mathbb{D}^\dagger \mathbb{D}$

$\therefore$ $\mathbb{D}^\dagger \mathbb{D} = E_d \rightarrow \mathbb{D}^\dagger = \mathbb{D}^{-1}$

NO.

DATE . .

- ここで $R_2 R_1 = R_3$ 回転操作が群をつくる

$R_1\psi = \psi\,\mathbb{D}(R_1)$, $R_2R_1\psi = R_2\psi\,\mathbb{D}(R_1) = \psi\,\mathbb{D}(R_2)\,\mathbb{D}(R_1)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad R_3\psi = \psi\,\mathbb{D}(R_3)$

$\therefore\ \psi\,\mathbb{D}(R_3) = \psi\,\mathbb{D}(R_2)\,\mathbb{D}(R_1)$ $\quad\psi^\dagger$ をかける $(\psi^\dagger\psi = E_d)$

$\Leftrightarrow\ \mathbb{D}(R_3) = \mathbb{D}(R_2)\,\mathbb{D}(R_1)$

- $\mathbb{D}(1) = E_d$: $\mathbb{D}(1)$ は何もしない(回転しない)

$\therefore\ \mathbb{D}(R^{-1})\,\mathbb{D}(R) = \mathbb{D}(1) = E_d$

$\mathbb{D}(R^{-1}) = \left(\mathbb{D}(R)\right)^{-1}$

$R \longleftrightarrow \mathbb{D}(R)$

rotation — $d\times d$ 行列

obstract — concrete

$\Rightarrow\ \mathbb{D}(R)$: 回転群の行列表現

unitary

波動関数の回転 = 回転の行列をつくる

無限小回転
· infinitesimal rotation (前にやったね)

$R = e^{-i\delta\vec{\omega}\cdot\vec{J}/\hbar}$ $\rightarrow$ $R = e^{-i\theta\hat{n}\cdot\vec{J}}$, $\hbar = 1$

$\delta\vec{\omega}$ 方向, $|\delta\vec{\omega}|$ 回転 　 $\hat{n}$ 方向, θ 回転 (θ:無限小)

$\rightarrow 1 - i\theta\hat{n}\cdot\vec{J}$

$\mathbb{D}(R) = \mathbb{D}(1 - i\theta\hat{n}\cdot\vec{J})$

$\mathbb{D}$ は $\vec{J}$ の行列要素で定まる
↑
$|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_d\rangle$: $d = 2j+1$, $\vec{J}^2$, J_z の同時固有関数を採用 (spin j 表現)

$$\langle\psi_m|J_z|\psi_{m'}\rangle = m\,\delta_{m,m'}$$
$$J_z|\psi_m\rangle = m|\psi_m\rangle$$
$$J_\pm|\psi_m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|\psi_{m\pm1}\rangle$$
$$\langle\psi_{m'}|J_\pm|\psi_m\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\delta_{m',m\pm1}$$

$\rightarrow$ このときの一般の $\mathbb{D}(R)$ は?

$R = R_\alpha(\hat{z})\,R_\beta(\hat{y})\,R_\gamma(\hat{z})$ なので、

$$\mathbb{D}(R) = \mathbb{D}(R_\alpha(\hat{z}))\,\mathbb{D}(R_\beta(\hat{y}))\,\mathbb{D}(R_\gamma(\hat{z}))$$

$R_\theta(\hat{n}) = e^{-i\theta\hat{n}\cdot\vec{J}}$

$$= \mathbb{D}(e^{-i\alpha J_z})\,\mathbb{D}(e^{-i\beta J_y})\,\mathbb{D}(e^{-i\gamma J_z})$$

$$\mathbb{D}(e^{-i\alpha J_z}) = \begin{pmatrix} e^{-i(-j)\alpha} & & & \\ & e^{-i(-j+1)\alpha} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-ij\alpha} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}(e^{ij\alpha}, \cdots, e^{-ij\alpha})$$ なので

NO.

DATE

$$[\mathbb{D}(R)]_{m',m} = \langle \psi_{m'} | e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} | \psi_m \rangle$$

$$R_\alpha(\hat{z})R_\beta(\hat{y})R_\gamma(\hat{z}) = e^{-i\alpha m'} \underbrace{[e^{-i\beta J_y}]_{m',m}}_{= d^j_{m'm}(\beta)} e^{-i\gamma m}$$

$d^j_{m'm}(\beta)$ を決めたい!

☆ $d^j_{m',m}(\beta)$: Schwinger Boson による方法で求める

a_+, a_- : Bosons

$[a_+, a_+^\dagger] = 1$, $[a_-, a_-^\dagger] = 1$, $[a_+, a_-] = 0$

$a \equiv \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}$ で、

$$a^\dagger a = (a_+^\dagger \ a_-^\dagger)\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}$$

$$= a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- = n_+ + n_- \quad \left(n_\pm = a_\pm^\dagger a_\pm : \begin{array}{l} \pm \text{Bosons の} \\ \text{number operator} \end{array} \right)$$

$\vec{J} \equiv \frac{1}{2} a^\dagger \sigma a$ ← Pauli 行列

$$\hookrightarrow J_i = \frac{1}{2} a^\dagger \sigma_i a = \frac{1}{2}(a_+ a_-)\sigma_i \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} a_\alpha^\dagger (\sigma_i)_{\alpha\alpha'} a_{\alpha'}$$

ここで $\vec{J}$: angular momentum より、

$$[J_i, J_j] = i\,\varepsilon_{ijk} J_k \quad (\hbar = 1)$$

を確認する必要がある。

NO.

DATE

$$[J_i, J_j] = \frac{1}{4}\left[a^\dagger_\alpha (\sigma_i)_{\alpha\beta} a_\beta,\ a^\dagger_\gamma (\sigma_j)_{\gamma\delta} a_\delta\right]$$

$[AB, C]$

$$= \frac{1}{4} a^\dagger_\alpha (\sigma_i)_{\alpha\beta} \underbrace{[a_\beta, a^\dagger_\gamma]}_{=\delta_{\beta\gamma}} (\sigma_j)_{\gamma\delta} a_\delta$$

$= A[B, C]$

$$+ \frac{1}{4} a^\dagger_\gamma (\sigma_j)_{\gamma\delta} \underbrace{[a^\dagger_\alpha, a_\delta]}_{=-\delta_{\alpha\delta}} (\sigma_j)_{\alpha\beta} a_\beta$$

$+$

$[A, C]\, B$

$(\because [a_\alpha, a^\dagger_\beta] = \delta_{\alpha\beta})$

$$= \frac{1}{4} a^\dagger_\alpha (\sigma_i)_{\alpha\beta} (\sigma_j)_{\beta\delta} a_\delta - \frac{1}{4} a^\dagger_\gamma (\sigma_j)_{\gamma\alpha} (\sigma_i)_{\alpha\beta} a_\beta$$

$$= \frac{1}{4} a^\dagger_\alpha (\sigma_i \sigma_j)_{\alpha\delta} a_\delta - \frac{1}{4} a^\dagger_\gamma (\sigma_j \sigma_i)_{\gamma\beta} a_\beta$$

$$= \frac{1}{4} a^\dagger (\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i) a$$

$i = j$ で $[J_i, J_j] = 0$

$i \neq j$ で … $\sigma_j \sigma_i = -\sigma_i \sigma_j$ なので

$$[J_i, J_j] = \frac{1}{4} a^\dagger 2 \sigma_i \sigma_j a$$

$$= \frac{1}{2} a^\dagger \sigma_i \sigma_j a$$

$\sigma_i \sigma_j = i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$

$$= \frac{1}{2} a^\dagger i \varepsilon_{ijk} \sigma_k a$$

$$= i \varepsilon_{ijk} \frac{1}{2} a^\dagger \sigma_k a$$

$$= i \varepsilon_{ijk} J_k$$

$$J^2 = \vec{J}\cdot\vec{J} = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$$

$\cdot\ J_z = a^\dagger \frac{1}{2}\sigma_z a = \frac{1}{2}(a_+^\dagger\ a_-^\dagger)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_+\\ a_-\end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) = \frac{1}{2}(n_+ - n_-)$$

$\cdot\ J_\pm = J_x \pm i J_y$

$$= a^\dagger(\sigma_x \pm i\sigma_y)a$$

$$= a^\dagger \frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\} a$$

$\therefore$
$$\begin{cases} J_+ = a^\dagger\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} a = a_+^\dagger a_- & - \to + \\ J_- = a^\dagger\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} a = a_-^\dagger a_+ & + \to - \end{cases}$$

$\therefore$
$$J^2 = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{a_+^\dagger a_- a_-^\dagger a_+}_{\substack{\| \\ a_+^\dagger a_+ \underbrace{a_- a_-^\dagger}_{1+a_-^\dagger a_-} \\ \| \\ n_+(1+n_-)}} + \underbrace{a_-^\dagger a_+ a_+^\dagger a_-}_{\substack{\| \\ a_-^\dagger a_- \underbrace{a_+ a_+^\dagger}_{1+a_+^\dagger a_+} \\ \| \\ n_-(1+n_+)}}\Big) + \frac{1}{4}(n_+ - n_-)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left\{n_+(1+n_-) + n_-(1+n_+)\right\} + \frac{1}{4}(n_+ + n_-)^2 - n_+n_-$$

$$= \frac{1}{4}\left(2n_+ + 2\cancel{n_+}n_- + 2n_- + 2\cancel{n_-}n_+ + (n_+ + n_-)^2 - 4\cancel{n_+}n_-\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2(n_+ + n_-) + (n_+ + n_-)^2\right) = \frac{1}{4}(2n + n^2) = \frac{1}{4}n(n+2)$$

$\therefore\ J^2 = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}n + 1\right)$

$\hat{j} = \frac{1}{2}\hat{n}$ ：全Boson数の半分 で $J^2 = \hat{j}(\hat{j}+1)$

NO.

DATE . .

$$\hat{j} = \frac{1}{2}(\hat{n}_+ + \hat{n}_-)$$

$$\hat{J}_z = \frac{1}{2}(\hat{n}_+ - \hat{n}_-)$$

$$|n_+, n_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_+!}}\frac{1}{\sqrt{n_-!}}(a_+^\dagger)^{n_+}(a_-^\dagger)^{n_-}|a\rangle$$

$$\hat{n}_\pm |n_+, n_-\rangle = n_\pm |n_+, n_-\rangle$$

$|jm\rangle \equiv |n_+, n_-\rangle$ で

$$\begin{cases} j = \frac{1}{2}(n_+ + n_-) \\ m = \frac{1}{2}(n_+ - n_-) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_+ = j + m \\ n_- = j - m \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(j+m)!}}\frac{1}{\sqrt{(j-m)!}}(a_+^\dagger)^{j+m}(a_-^\dagger)^{j-m}|a\rangle$$

explict form