

物理

20110859

佐藤和之

☆ Spin

一様磁場中の角運動量

磁場中の原子のエネルギー準位

磁場中の量子力学とは?

古典論 (解析力学)

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} : \text{磁場なし} \quad \text{rot } \vec{A} = \vec{B}$$

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 : \text{磁場あり}$$

↓ 11=11トンの運動方程式より

D-L "ノカ" による Heiton 方程式 と なる。

量子論 (量子化)

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2, \quad \vec{p} = -i\hbar\nabla, \quad [r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

一様磁場 $\vec{B}$: 一定

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \quad \text{と 2 通り} \quad \left(\text{対称ゲージ} \right)$$

 $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ を満たす $\vec{A}$
 (gauge の自由度)

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{A})_a &= \epsilon_{abc} \partial_b A_c \\ &= \epsilon_{abc} \partial_b \left(\frac{1}{2} \epsilon_{cjk} B_j r_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \epsilon_{cjk} B_j \delta_{bk} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \epsilon_{cjb} B_j \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{aj} \delta_{bb} + \delta_{ab} \delta_{jj}) B_j \\ &= \delta_{aj} B_j \\ &= B_a \end{aligned}$$

$$A_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_j r_k \text{ より}$$

$$\therefore \text{rot } \vec{A} = \text{rot} \left(\frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \right) = \vec{B}$$

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{e}{2m} (\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}) + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 \quad \left(\begin{array}{l} q_1 < q \text{ 場合 } \gamma \\ H_p \gg H_D \end{array} \right)$$

磁場なし $\vec{B} = 0$ の場合

$$H_p = -\frac{e}{2m} (\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p})$$

$$(\vec{p} \cdot \vec{A})\psi = (-i\hbar \nabla \cdot \vec{A})\psi = -i\hbar \partial_i (A_i \psi) = -i\hbar ((\partial_i A_i) \psi + A_i (\partial_i \psi))$$

$$= (-i\hbar (\text{div } \vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{p}) \psi$$

$$\text{div } \vec{A} = \partial_i A_i = \partial_i \left(\frac{1}{2} \epsilon_{iab} B_a r_b \right)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{iab} B_a \delta_{ib} = \frac{1}{2} \epsilon_{bia} B_a = 0$$

$$\therefore H_p = -\frac{e}{2m} (\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{A} \cdot \vec{p})$$

$$= -\frac{e}{2m} \cdot 2 \vec{A} \cdot \vec{p} = -\frac{e}{2m} \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \right) \cdot \vec{p}$$

$$= -\frac{e}{2m} \underbrace{(\vec{r} \times \vec{p})}_{\vec{L}} \cdot \vec{B}$$

$$= -\vec{M} \cdot \vec{B} \quad \vec{M} = \frac{e}{2m} \vec{L} : \text{磁化と等}$$

角運動量 $\sim$ 磁化

" $H=H_0$ " と考え、原子のスペクトルを解析する (光吸収の実験結果より)

原子のエネルギー準位 $E_n \sim -C \frac{1}{n^2}$ (縮退している)

磁場を

$B \neq 0$

$\Rightarrow$

$\longrightarrow$

変化する

"Zeeman 効果"

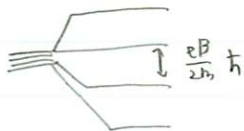
$\vec{B}$ の方向に z 軸をとる $\rightarrow \vec{L} \cdot \vec{B} = BL_z$: z 軸 - 座標に合わせる

$$\therefore H_p = -\frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B} = -\frac{eB}{2m} L_z$$

L^2 の固有値 : $L(L+1)\hbar^2$ とわかれます

L_z の固有値 : $-\hbar L, \dots, \hbar L$ とわかれます

$2L+1$ コー = 縮退数



このように分解はされません

実験の解析結果は違う

なぜ?

$$\vec{L} \rightarrow \vec{L} + g\vec{S} \quad g \sim 2 \quad \vec{S}^2 = \hbar^2 s(s+1) \quad s = \frac{1}{2} \quad \text{スピン}$$

$\rightarrow$ このように考えれば実験結果もうよく解釈できる (Pauli のスピン仮説)

Dirac の特殊相対論を満たす量子論の発見により導き出された

Sch. eq. $\rightarrow$ Dirac の方程式 (3+1)

空間 時間

Spin 1/2 具体的に考えてみる ($S = \hbar/2$)

角運動量 $J = 0, 1, 2, \dots$ ← 球面調和関数
 $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ← スピン?

$$S = 1/2 \rightarrow \vec{J}^2 = \hbar^2 S(S+1) = \frac{3}{4}\hbar^2$$

角運動量 $\vec{J} \rightarrow \vec{S}$ と考えて
 $J^2 = \hbar^2 j(j+1)$

$$S_z = m\hbar \quad m = -1/2, -1/2 + 1 = 1/2$$

$$\begin{cases} J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \\ J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} \vec{J}^2 |1/2, \pm 1/2\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |1/2, \pm 1/2\rangle \\ S_z |1/2, \pm 1/2\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |1/2, \pm 1/2\rangle \end{cases}$$

$$|1\rangle = |1/2, 1/2\rangle$$

$$|1\rangle = |1/2, -1/2\rangle$$

$$\text{と考えると} \quad \begin{cases} S^2 |1\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |1\rangle \\ S^2 |1\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2 |1\rangle \\ S_z |1\rangle = \frac{\hbar}{2} |1\rangle \\ S_z |1\rangle = -\frac{\hbar}{2} |1\rangle \end{cases} \quad \text{と表すことができる。}$$

$$\langle j, m+1 | J_+ | j, m \rangle = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \quad \text{より}$$

$$S_{\pm} = S_x \pm i S_y \quad \text{と考えると}$$

$$\begin{cases} \langle 1/2, 1/2 | S_+ | 1/2, -1/2 \rangle = \hbar \sqrt{(1/2 - (-1/2))(1/2 - (-1/2) + 1)} = \hbar \\ (\langle 1/2, 1/2 | S_+ | 1/2, -1/2 \rangle)^* = \langle -1/2, 1/2 | S_+^\dagger | 1/2, +1/2 \rangle \\ = \langle -1/2, 1/2 | S_- | 1/2, +1/2 \rangle = (\hbar)^* = \hbar \\ \langle 1/2, \pm 1/2 | S_{\pm} | 1/2, \pm 1/2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle 1 | S_+ | 1 \rangle = \hbar, \quad \langle 1 | S_- | 1 \rangle = \hbar \\ \langle 1 | S_+ | 1 \rangle = \langle 1 | S_+ | 1 \rangle = \langle 1 | S_- | 1 \rangle = \langle 1 | S_- | 1 \rangle = 0 \\ S_+ | 1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle 1 | S_+ | 1 \rangle, \quad S_- | 1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle 1 | S_- | 1 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\psi = (|1\rangle, |1\rangle) \quad \text{と考えると}$$

(標準的に) 常に $(|1\rangle, |1\rangle)$ の基底をとる。

$$\psi^\dagger S_+ \psi = (\langle 1 |, \langle 1 |) S_+ (|1\rangle, |1\rangle)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle 1 | S_+ | 1 \rangle & \langle 1 | S_+ | 1 \rangle \\ \langle 1 | S_+ | 1 \rangle & \langle 1 | S_+ | 1 \rangle \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow (|1\rangle, |1\rangle) \text{ も基底とすると } S_+ \text{ の行列表示}$$

同様に $\downarrow$

$$\psi^\dagger S_- \psi = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{と } q, d \text{ と}$$

$$S_x = \frac{1}{2} (S_+ + S_-) = \hbar \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{1}{2i} (S_+ - S_-) = \hbar \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \begin{pmatrix} \langle \uparrow | S_z | \uparrow \rangle & \langle \uparrow | S_z | \downarrow \rangle \\ \langle \downarrow | S_z | \uparrow \rangle & \langle \downarrow | S_z | \downarrow \rangle \end{pmatrix} = \hbar \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

以上をまとめる

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} \quad \text{Tr } \vec{\sigma} = \vec{0}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Pauli 行列}$$

$$\sigma_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ あり}$$

$$\begin{cases} \sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0 \\ \sigma_y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_0 \\ \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_0 \end{cases} \Rightarrow \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \sigma_0$$

$$\begin{cases} \sigma_x \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \sigma_z, & \sigma_y \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i \sigma_x \\ \sigma_y \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \sigma_z, & \sigma_z \sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i \sigma_x \\ \sigma_z \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i \sigma_y \\ \sigma_x \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i \sigma_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow i \neq j \text{ なら } \sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad \{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0$$

$\Rightarrow$ 反可換

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} : 3\text{次元のベクトルと見做す}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{\sigma} = A_x \sigma_x + A_y \sigma_y + A_z \sigma_z = \begin{pmatrix} A_z & A_x - iA_y \\ A_x + iA_y & -A_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (\vec{A} \cdot \vec{\sigma})(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) &= \sum_{i,j} A_i \sigma_i \cdot B_j \sigma_j \\ &= \left(\sum_{i,j} + \sum_{i \neq j} \right) A_i B_j \sigma_i \sigma_j \\ &= \sum_i A_i B_i \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} A_i B_j \sigma_i \sigma_j \\ &= \sum_i A_i B_i \sigma_0 + \sum_{i \neq j} A_i B_j \cdot i \epsilon_{ijk} \sigma_k \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{B}) \sigma_0 + i \sigma_k \underbrace{\sum_{i \neq j} \epsilon_{ijk} A_i B_j}_{= (\vec{A} \times \vec{B})_k} \\ &= (\vec{A} \cdot \vec{B}) \sigma_0 + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

$$\text{例)} \quad H = -\mu \vec{B} \cdot \vec{S} = -\mu \vec{B} \cdot \left(\frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \right) = -\frac{\hbar\mu}{2} \vec{B} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\begin{aligned} \text{交換可能な固有値 } E_1, E_2 \text{ があり} \quad \text{Tr } \vec{\sigma} = 0 \text{ より} \\ \text{Tr } H = E_1 + E_2 = -\frac{\hbar\mu}{2} \text{Tr } (\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore E_1 = -E_2 = E \text{ あり}$$

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{\hbar\mu}{2} \right)^2 (\vec{B} \cdot \vec{\sigma})(\vec{B} \cdot \vec{\sigma}) \\ &= \left(\frac{\hbar\mu}{2} \right)^2 (\vec{B} \cdot \vec{B}) \sigma_0 \\ &= \left(\frac{\hbar\mu}{2} |\vec{B}| \right)^2 \sigma_0 \end{aligned}$$

$$\therefore H^2 \text{ の固有値 } E^2, (-E)^2 \text{ あり}$$

$$E = \frac{\hbar\mu}{2} |\vec{B}| \quad \therefore H \text{ の固有値 } E = \pm \frac{\hbar\mu}{2} |\vec{B}|$$