量子力学3　演習問題8　2011O892　吉岡篤志

問題1

(1). $\vec{r}' = R\vec{r}$ とする. 長さ不変なので

$|\vec{r}'|^2 = |\vec{r}|^2$ — (i)

$|\vec{r}'|^2 = \tilde{\vec{r}}\vec{r} = \tilde{R}\tilde{\vec{r}}R\vec{r} = \tilde{\vec{r}}\tilde{R}R\vec{r}$ — (ii)

(i), (ii) から

$\tilde{R}R = 1$　　$\tilde{R} = R^{-1}$

よって.

$\det \tilde{R}R = 1$ — (iii)

$\det \tilde{R}R = \det \tilde{R} \det R = (\det R)^2$ — (iv)

(iii), (iv) から.

$\det R = \pm 1$ — (v)

Rが恒等変換に連続でつながるので

Rが恒等変換のとき $R = E$ より.　　$\det R = 1$

よって(v)は $\det R = 1$ //

(2). 3次元回転の回転軸があることを示すには

$(R - E_3)\vec{v} = 0$ となる $\vec{v} \neq 0$ の $\vec{v}$ が示せればよい.

つまり $\det(R - E_3) = 0$ を示す

$\det(R - E_3) = \det(\widetilde{R - E_3})$

$= \det(\tilde{R} - E_3) = \det(R^{-1} - E_3) = \det R^{-1}(E_3 - R)$

ここで(1)から. $\det R = \det R^{-1} = 1$ より.

$\det(R - E_3) = \det(E_3 - R) = \det\{-E_3(R - E_3)\}$

$= \det(-E_3)\det(R - E_3)$

ここで.

$$\det(-E_3) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \quad \text{より}$$

$\det(R - E_3) = -\det(R - E_3)$

$\Leftrightarrow \quad \det(R - E_3) = 0$

よって. 3次元回転には回転軸がある事を示した //

(3). $R' = QRQ^{-1}$ において

$\vec{x}' = R'\vec{x}$ として

$|\vec{x}'|^2 = \widehat{\vec{x}'}\vec{x}' = \widehat{R'\vec{x}}R'\vec{x}$

$= \widehat{\vec{x}}\widehat{R'}R'\vec{x}$

ここで

$\widehat{R'}R' = \widehat{QRQ^{-1}}QRQ^{-1} = \widehat{Q^{-1}}\widehat{R}\widehat{Q}QRQ^{-1}$

$= Q\widehat{R}Q^{-1}QRQ^{-1} = Q\widehat{R}RQ^{-1} = 1$

よって.

$|\vec{x}'|^2 = \widehat{\vec{x}}1\vec{x} = |\vec{x}|^2$ よって長さは不変

$\vec{x} = 0$ のとき.

$\vec{x}' = 0$ よって 原点は固定されている.

よってこれらから R' は回転である

$\vec{v}' = Q\vec{v}$ とすると.

$R'\vec{v}' = QRQ^{-1}Q\vec{v} = QR\vec{v}$ $\vec{v}$ は回転軸なので

$R\vec{v} = \vec{v}$ よって

$R'\vec{v}' = Q\vec{v} = \vec{v}'$

∴ R' の回転軸は $\vec{v}' = Q\vec{v}$ //

(4). (3) より.

$R_\beta(\gamma_1) = R_\alpha(z)R_\beta(y)R_\alpha^{-1}(z)$

$R_\gamma(z_2) = R_\beta(\gamma_1)R_\gamma(z)R_\beta^{-1}(\gamma_1)$ よって

$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_\gamma(z_2)R_\beta(\gamma_1)R_\alpha(z)$

$= R_\beta(\gamma_1)R_\gamma(z)\underbrace{R_\beta^{-1}(y)R_\beta(\gamma_1)}_{=1}R_\alpha(z)$

$= R_\beta(\gamma_1)R_\gamma(z)R_\alpha(z) = R_\alpha(z)R_\beta(y)R_\alpha^{-1}(z)R_\gamma(z)R_\alpha(z)$

同じ回転軸まわりの回転は交換するから.

$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_\alpha(z)R_\beta(y)R_\gamma(z)R_\alpha(z)R_\alpha^{-1}(z)$

$= R_\alpha(z)R_\beta(y)\underline{R_\gamma(z)}$ //

問題 2

(1). ハミルトニアン H のエネルギー E の規格直交化された固有状態は $|\psi_j\rangle$ $(j=1,\cdots,d)$ とすると

$H|\psi_j\rangle = |\psi_j\rangle E$ 両辺左から R をかけて

$\Leftrightarrow$ $RH|\psi_j\rangle = R|\psi_j\rangle E$

$[R,H]=0$ より

$RH|\psi_j\rangle = HR|\psi_j\rangle$ よって

$HR|\psi_j\rangle = R|\psi_j\rangle E$

よって $R|\psi_j\rangle$ もエネルギー E の固有状態である.

つまり $(|\psi_1\rangle, \cdots\cdots, |\psi_d\rangle)$ の線形結合で表わされる.

よって d 次元行列 D を用いて

$$R|\psi_j\rangle = \sum_{i=1}^{d} |\psi_i\rangle D_{ij}(R)$$

よって示された //

(2). $\psi = (|\psi_1\rangle, \cdots\cdots, |\psi_d\rangle)$ とすると

(1) から

$$R|\psi_j\rangle = \sum_{i=1}^{d} |\psi_i\rangle D_{ij}(R)$$ よって

$$R\psi = (R|\psi_1\rangle, \cdots\cdots, R|\psi_d\rangle)$$

$$= (|\psi_1\rangle, \cdots\cdots, |\psi_d\rangle) \begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1d} \\ D_{21} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{d1} & \cdots & D_{dd} \end{pmatrix}$$

$$D(R) = \begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1d} \\ D_{21} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{d1} & \cdots & D_{dd} \end{pmatrix}$$ とすると $R\psi = \psi D(R)$ //

(3) (2) を用いて.

$$(R_2R_1)\psi = R_2(R_1\psi)$$
$$= R_2\psi D(R_1)$$
$$= \psi D(R_2)D(R_1)$$ //

(4) (3) を用いて.

$R_1 = R$, $R_2 = R^{-1}$ とすると.

$(R^{-1}R)\psi = \psi D(R^{-1})D(R)$

$\Leftrightarrow$ $\psi = \psi D(R^{-1})D(R)$ よって.

$D(R^{-1})D(R) = E_d$

$\Leftrightarrow$ $D(R^{-1}) = [D(R)]^{-1}$ (2) を用いて.

$(R^{-1})\psi = \psi D(R^{-1})$

$= \psi [D(R)]^{-1}$ //

問題3

(1). $P\psi(x) = \psi(-x)$, $P^2 = 1$ において

$P\cdot(P\psi(x)) = P\psi(-x) = \psi(x)$

$(P\cdot P)\psi(x) = P^2\psi(x) = 1\cdot\psi(x) = \psi(x)$

よって. $P\cdot P = P^2$

$P^2\cdot(P^2\psi(x)) = P^2\cdot(\psi(x)) = \psi(x)$

$(P^2\cdot P^2)\psi(x) = P^4\psi(x) = \psi(x)$

よって. $P^2\cdot P^2 = P^4$

$P\cdot(PP)\psi(x) = P\psi(x) = \psi(-x)$

$(P\cdot P)P\psi(x) = (P\cdot P)\psi(-x) = \psi(-x)$

よって. $P\cdot(P\cdot P) = P\cdot(P\cdot P)$

$P^2\cdot(P^2\cdot P^2)\psi(x) = \psi^2(x)$

$(P\cdot P^2)\cdot P^2\psi(x) = \psi(x)$ よって. $P^2\cdot(P^2\cdot P^2) = P^2\cdot(P^2\cdot P^2)$

$P\cdot 1\psi(x) = P\psi(x) = \psi(-x)$

$1\cdot P\psi(x) = 1\cdot\psi(-x) = \psi(-x)$ よって. $P\cdot 1 = 1\cdot P$

$P^2\cdot 1\psi(x) = P^2\psi(x) = \psi(x)$

$1\cdot P^2\psi(x) = 1\cdot\psi(x) = \psi(x)$ よって. $1\cdot P^2 = P^2\cdot 1$

$P\cdot P = 1$ より $P^{-1} = P$

$P\cdot P^{-1}\psi(x) = P\psi(-x) = \psi(x)$

$P^{-1}\cdot P\psi(x) = P^{-1}\psi(-x) = \psi(x)$ よって. $P\cdot P^{-1} = P^{-1}\cdot P$

$P\cdot P^2 = 1$ より $P^{2-1} = P^2$

$P^2\cdot P^{2-1}\psi(x) = \psi(x)$

$P^{2-1}\cdot P^2\psi(x) = \psi(x)$ よって. $P^2\cdot P^{2-1} = P^{2-1}\cdot P^2$

これらより.

$\{P, P^2 = 1\}$ は群をつくる //

(2). $\psi = (\psi_k, \psi_{-k})$

$R\psi = \psi D(R)$ となる $D(R)$ を求める. $R = P$ のとき.

$P\psi_k = P\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right) = \psi_{-k}$

$P\psi_{-k} = P\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx}\right) = \psi_k$

よって. $D(R)$ は 2×2 の行列なので

$$D(R) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ //

$R = 1$ のとき.

$1\psi_k = \psi_k$

$1\psi_{-k} = \psi_{-k}$ よって.

$$D(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ //

(3). $\psi_\pm = (\psi_k \pm \psi_{-k})/\sqrt{2}$

$P\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} P(\psi_k + \psi_{-k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{-k} + \psi_k) = \underline{\psi_+}$ //

$P\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} P(\psi_k - \psi_{-k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{-k} - \psi_k) = \underline{-\psi_-}$ //

(4). $\psi' = (\psi_+, \psi_-)$ として

$\psi = \psi' U$ となる U を考える

$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ とすると

$\psi = (\psi_+ \ \psi_-)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\psi_+ + C\psi_- \\ B\psi_+ + D\psi_- \end{pmatrix}$

$\psi = (\psi_k, \psi_{-k})$ より

$\psi_k = A\psi_+ + C\psi_-$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(A+C)\psi_k + \frac{1}{\sqrt{2}}(A-C)\psi_{-k}$

よって

$\begin{cases} A+C=\sqrt{2} \\ A-C=0 \end{cases}$ よって $A = C = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\psi_{-k} = B\psi_+ + D\psi_-$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(B+D)\psi_k + \frac{1}{\sqrt{2}}(B-D)\psi_{-k}$

よって

$\begin{cases} B+D=0 \\ B-D=\sqrt{2} \end{cases}$ よって $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $D = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore U = \underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$ //

(5). $R\psi = \psi' D'(R)$ $D'(R)$は2×2行列

$R = 1$ のとき

$\psi' = \psi' D'(R)$

$D'(R) = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ //

$R = P$ のとき

$P\psi' = \psi' D'(R)$

$P(\psi_+, \psi_-) = (\psi_+, -\psi_-)$ より

$(\psi_+, \psi_-) = (\psi_+, \psi_-)\begin{pmatrix} D'_{11} & D'_{12} \\ D'_{21} & D'_{22} \end{pmatrix}$ $D'_{11}=1$, $D'_{21}=0$, $D'_{12}=0$, $D'_{22}=-1$ となる

$\therefore D'(R) = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$ //

(6) (4)から

$\psi = \psi' U$

$R\psi = \psi D(R)$ より

$R\psi' U = \psi' U D(R)$　　右から U^{-1} をかけると

$R\psi' = \psi' U D(R) U^{-1}$　　(5)から $R\psi' = \psi' D'(R)$ より

$D'(R) = U D(R) U^{-1}$ //

$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$　$U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ //

問題4.

z 軸方向をオイラー角 $R(\alpha,\beta,\gamma)$ により回転した方向に対する波動関数を

$\psi(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z})$ として、この関数の回転 Q は

$Q\psi(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = \psi(Q^{-1}R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z})$ — (i)

このとき、整数 l に対してスピン表現 $D^l_{MN}(R)$ を用いると

$\psi_M(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = [D^l_{MN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$ — (ii)　　$(M = -l, \cdots, l)$

ここで:

$Q\psi_M(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = \psi_M(Q^{-1}R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z})$　　(∵ (i))

(ii)より、$Q\psi_M(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = [D^l_{MN}(Q^{-1}R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$

ここで:

$D^l_{MN}(Q^{-1}R(\alpha,\beta,\gamma)) = D^l_{MK}(Q^{-1}) D_{KN}(R(\alpha,\beta,\gamma))$　　より

$Q\psi_M(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = [D^l_{MK}(Q^{-1})]^* [D_{KN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$

また、$D(Q^{-1}) = \{D(Q)\}^{-1}$ で Q が unitary なので D も unitary

$D^+(Q) = D(Q^{-1})$

$D^+(Q) = \overline{D}^*(Q)$ なので、$[D^l_{MK}(Q^{-1})]^* = [D^l(Q)^+]^*_{MK} = D^l_{KM}(Q)$

よって、

$Q\psi_M(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = [[D^l(Q)]^+]^*_{MK} [D^l_{KN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$

$= [D^l_{KN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^* D^l_{KM}(Q)$

(ii)より、$\psi_K(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = [D^l_{KN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$

よって

$Q\psi_M(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z})$

$= \psi_K(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) D^l_{KM}(Q)$ //