量子力学3　演習問題8

No.
Date

物理　　2011085?　　佐藤 和之

問題1

(1) 恒等変換に連続につながる3次元の線形変換で長さ不変

→ ある点を中心に角度のみ変わる

→ 回転

$\vec{r}' = R\vec{r}$ とする

長さ不変より

$|\vec{r}|^2 = |\vec{r}'|^2 = \vec{r}\, R^t R\, \vec{r}$

$\Rightarrow \tilde{R}R = E \quad \leftrightarrow \quad \tilde{R} = R^{-1}$

両辺 det をとると

$\det \tilde{R}R = \det E = 1$

$= \det R^{-1} \det R$

$= (\det R)^2$

Rは回転行列だから
特殊直交行列だから
$\Rightarrow \det R = 1$

(2) Rを回転行列とする

(1)より $\det R = 1$, $R\tilde{R} = 1$

行列 $R - E_3$ を考える (E_3 は 3×3 単位行列)

$\det(R-E_3) = \det(\widetilde{R-E_3}) = \det(\tilde{R} - E_3) = \det(R^{-1} - E_3)$

$= \det R^{-1}(E_3 - R) = \det R^{-1} \det(E_3 - R)$

$= 1 \cdot (-1)^3 \det(R - E_3)$

$= -\det(R-E_3)$

$\therefore \det(R-E_3) = 0$

→ $(R-E_3)\vec{v} = 0$ となるような $\vec{v}$ が存在する

$R\vec{v} = \vec{v}$

この $\vec{v}$ は回転に対して不変だから回転軸である //

No.
Date

(3) $\vec{v}$ を回転軸としたときの回転を $R(\vec{v})$ とすると

$R(\vec{v})\vec{v} = \vec{v}$ となる

ために Q を作用させると $QR(\vec{v})\vec{v} = Q\vec{v}$

$QR(\vec{v})Q^{-1}Q\vec{v} = Q\vec{v}$

$QR(\vec{v})Q^{-1} = R'(\vec{v}')$ とすると $R'(\vec{v}')\vec{v}' = \vec{v}'$,

$Q\vec{v} = \vec{v}'$

$\det R' = \det(QRQ^{-1})$
$= \det Q \cdot \det R \cdot \det Q^{-1}$
$= 1$

$R \to R'$ は座標変換したと考えれば回転角は同じ
R' の回転軸は $\vec{v}' = Q\vec{v}$

, $\det R' = 1$

$\Rightarrow R'(\vec{v}')$ は回転である //

(4) (3)より 回転角が同じで、回転軸を $\hat{n} \to \hat{n}' = Q\hat{n}$ に移す変換は

$R_\alpha(\hat{n}') = Q R_\alpha(\hat{n}) Q^{-1}$ であらわされる。

$$\Rightarrow \begin{cases} R_\beta(y_1) = R_\alpha(z)\, R_\beta(y)\, R_\alpha^{-1}(z) \\ R_\gamma(z_2) = R_\beta(y_1)\, R_\gamma(z_1)\, R_\beta^{-1}(y_1) \\ R_\gamma(z_1) = R_\alpha(z)\, R_\gamma(z)\, R_\alpha^{-1}(z) \end{cases}$$

$\therefore R(\alpha,\beta,\gamma) = R_\gamma(z_2)\, R_\beta(y_1)\, R_\alpha(z)$

$= (R_\beta(y_1)\, R_\gamma(z_1)\, R_\beta^{-1}(y_1))\, R_\beta(y_1)\, R_\alpha(z)$

$= R_\beta(y_1)\, R_\gamma(z_1)\, R_\alpha(z)$

$= (R_\alpha(z)\, R_\beta(y)\, R_\alpha^{-1}(z))\, (R_\alpha(z)\, R_\gamma(z)\, R_\alpha^{-1}(z))\, R_\alpha(z)$

$= R_\alpha(z)\, R_\beta(y)\, R_\gamma(z)$

//

No.
Date

問題 2

(1) H のエネルギー E の規格直交化された固有状態 $|\psi_i\rangle$ $(i=1,\cdots d)$

$$H|\psi_i\rangle = |\psi_i\rangle E$$

左から R を作用させると $RH|\psi_i\rangle = R|\psi_i\rangle E$

$[H,R]=0$ より $HR|\psi_i\rangle = R|\psi_i\rangle E$

つまり、$R|\psi_i\rangle$ は H のエネルギー E の固有状態である → $R|\psi_i\rangle$ は $\{|\psi_i\rangle\}$ の線形結合で表せる.

$\therefore R|\psi_i\rangle = |\psi_i\rangle D_{ij}(R)$ となるような

d 次元行列 $(\{D(R)\}_{ij} = D_{ij}(R))$ が存在する //

(2) (1) より $R|\psi_i\rangle = |\psi_i\rangle D_{ij}(R)$

$$(R|\psi_1\rangle, R|\psi_2\rangle, \cdots, R|\psi_d\rangle) = (|\psi_i\rangle D_{i1}(R), |\psi_i\rangle D_{i2}(R), \cdots, |\psi_i\rangle D_{id}(R))$$

$$R(|\psi_1\rangle, \cdots |\psi_d\rangle) = (|\psi_1\rangle, \cdots |\psi_d\rangle) \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1d} \\ D_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{d1} & \cdots & & D_{dd} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_{ij}(R) = \langle\psi_i|R|\psi_j\rangle \quad \underline{\therefore D(R)}$$ //

(3) (2) より $R\psi = \psi D(R)$ となる

$R \to R_1$ とすると $R_1\psi = \psi D(R_1)$

左から R_2 を作用させると $R_2R_1\psi = R_2\psi D(R_1) = \psi D(R_2)D(R_1)$ //

(4) E を単位行列とすると $E \cdot R = R$

(3) において $R_2 = E$, $R_1 = R$ とすると

$$E \cdot R\psi = \psi D(E) D(R)$$

$$\underline{\therefore R\psi = \psi D(R)} \quad \Rightarrow D(E) = E \text{ となる}$$

$R^{-1}R = E$ より

$$R^{-1}R\psi = \psi D(R^{-1}) D(R)$$

$$\underline{\therefore E\psi = \psi} \quad \Rightarrow \psi[D(R)]^{-1} = \psi D(R^{-1}) = R^{-1}\psi$$ //

No.
Date

問題3

(i) (i) $P \cdot P^2 = P \cdot 1 = P$, $P^2 \cdot P = 1 \cdot P = P$ より

積について閉じている。

(ii) $\begin{cases} (P \cdot P) P^2 = (P^2) \cdot P^2 = 1 \cdot 1 = 1 \\ P \cdot (P P^2) = P \cdot (P \cdot 1) = P \cdot P = P^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} (P^2 \cdot P^2) P = (1 \cdot 1) \cdot P = P \\ P^2 (P^2 \cdot P) = 1 \cdot (1 \cdot P) = P \end{cases}$

⇒ 結合則が成立している

(iii) $e = 1$ とおくと

$\begin{cases} eP = 1 \cdot P = P \ , \ Pe = P \cdot 1 = P \\ eP^2 = 1 \cdot 1 = 1 \ , \ P^2 e = 1 \cdot 1 = 1 \end{cases}$

⇒ $e = 1$ が単位元となっている

(iv) $P^2 = 1$ となっているから P は逆元である

(i) ~ (iv) より $\{P, P^2 = 1\}$ は群をつくる //

(2) $\psi(x) D(P) = P \psi(x) = \psi(-x) = (L^{-1/2} e^{-ikx} , L^{-1/2} e^{ikx})$

$= (L^{-1/2} e^{ikx} , L^{-1/2} e^{-ikx}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore D(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\psi(x) D(P^2) = P^2 \psi(x) = \psi(x) = (\psi_k , \psi_{-k}) = (\psi_k , \psi_{-k}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore D(P^2 = 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ //

No.
Date

(3) $P\psi_+ = P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_k + \psi_{-k})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_k(-x) + \psi_{-k}(-x))$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(L^{-1/2}e^{-ikx} + L^{-1/2}e^{ikx}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{-k}(x) + \psi_k(-x))$

$= \psi_+$ //

$P\psi_- = P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_k - \psi_{-k})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_k(-x) - \psi_{-k}(-x))$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(L^{-1/2}e^{-ikx} - L^{-1/2}e^{ikx}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_k(x) - \psi_{-k}(x))$

$= -\psi_-$

$\therefore P\psi_\pm = \pm\psi_\pm$ //

(4) $\psi = \psi' U = (\psi_+, \psi_-) U$

U を 2×2 行列だから $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく

$\therefore \begin{cases} \psi_k = a\psi_+ + c\psi_- = \frac{a+c}{\sqrt{2}}\psi_k + \frac{a-c}{\sqrt{2}}\psi_{-k} \\ \psi_{-k} = b\psi_+ + d\psi_- = \frac{b+d}{\sqrt{2}}\psi_k + \frac{b-d}{\sqrt{2}}\psi_{-k} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad 1 = \frac{a+c}{\sqrt{2}} \qquad 0 = \frac{b+d}{\sqrt{2}}$

$0 = \frac{a-c}{\sqrt{2}} \qquad 1 = \frac{b-d}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}},\ c = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{2}},\ d = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ //

No.
Date

(5) $\psi' D'(P) = P\psi' = (P\psi_+ , P\psi_-) = (\psi_+ , -\psi_-) = \psi' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\psi' D'(P^2) = P^2\psi' = \psi' = \psi' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore D'(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$D'(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ //

(6) (5)より $R\psi' = \psi' D'(R)$

(4)より $R\,\psi U^{-1} = \psi U^{-1} D'(R)$

$\psi D(R) U^{-1} = \psi U^{-1} D'(R)$

$\psi D(R) = \psi U^{-1} D'(R) U$

$\Rightarrow$ $D(R) = U^{-1} D'(R) U$

$D'(R) = U D(R) U^{-1}$

(これを確認してみよう)

$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow U = U^{-1}$

$U D(P) U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D'(P)$

$U D(1) U^{-1} = U E_2 U^{-1} = E_2 = D'(P^2)$

$U D(R) U^{-1} = D'(R)$ //

No.
Date

問題4

Q $\psi_m(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = \psi_m(Q^{-1}R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z})$

$= [D^{\ell}_{MN}(Q^{-1}R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$

問題2 (3) より $R_2R_1\psi = \psi D(R_2R_1) = \psi D(R_2)D(R_1)$

$= [D^{\ell}_{MK}(Q^{-1}) \cdot D^{\ell}_{KH}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$

$= [D^{\ell}_{MK}(Q^{-1})]^* [D^{\ell}_{KN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$

問題2 (4) より $D(R^{-1}) = [D(R)]^{-1}$

すた $R\psi = \psi D(R)$

両辺 † をとると $\psi^\dagger R^\dagger = (D(R))^\dagger \psi^\dagger$

$\Rightarrow \psi^\dagger R^\dagger R\psi = (D(R))^\dagger \psi^\dagger \psi D(R)$

$R^\dagger R = E$, $\psi^\dagger\psi = \begin{pmatrix}\langle\psi_1|\\ \vdots\\ \langle\psi_d|\end{pmatrix}(|\psi_1\rangle,\cdots,|\psi_d\rangle) = \begin{pmatrix}\langle\psi_1|\psi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_1|\psi_d\rangle\\ \vdots & & \\ \langle\psi_d|\psi_1\rangle & \cdots & \langle\psi_d|\psi_d\rangle\end{pmatrix} = E$

$\Rightarrow \psi^\dagger\psi = D(R)^\dagger D(R)$

$D^\dagger(R)D(R) = E$ D は unitary

$= [\underbrace{[D^{\ell}_{MK}(Q)]^{-1}}_{[D^{\ell}_{MK}(Q)]^\dagger}]^* [D^{\ell}_{KN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$

$= [(D^{\ell}(Q))^\dagger]^*_{MK} [D^{\ell}_{KN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$

数は入れ換え可能
$[D^{\ell}(Q)]^\dagger_{MK} = [D^{\ell}(Q)]^*_{KM}$

$= [D^{\ell}_{KN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^* D^{\ell}_{KM}(Q)$

$= \psi_K(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) D^{\ell}_{KM}(Q)$

($\psi_m(R(\alpha,\beta,\gamma)\hat{z}) = [D^{\ell}_{MN}(R(\alpha,\beta,\gamma))]^*$ より) //