量子力学3

演習7　山崎智矢 No. 20111089O

問題1

(a) $T_q^{(k)}$がk階の既約テンソルであるとは

$$[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}$$

$$[J_\pm, T_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\, T_{q\pm1}^{(k)}$$

をみたすことを言う。

(b) $O_q^{(k)}$ は $R O_q^{(k)} R^{-1} = \sum_{q'} O_{q'}^{(k)} D_{q'q}^{(k)}(R)$ をみたす。

$R = e^{-i\delta\theta \vec{n}\cdot\vec{J}} = 1 - i\delta\theta\vec{n}\cdot\vec{J}$ を代入

ただし $(\delta\theta)^2$ は無視する。

$$R O_q^{(k)} R^{-1} = (1 - i\delta\theta\vec{n}\cdot\vec{J}) O_q^{(k)} (1 + i\delta\theta\vec{n}\cdot\vec{J})$$

$$= O_q^{(k)} + O_q^{(k)} i\delta\theta\vec{n}\cdot\vec{J} - i\delta\theta\vec{n}\cdot\vec{J} O_q^{(k)}$$

$$\sum_{q'} O_{q'}^{(k)} D_{q'q}^{(k)}(R) = O_q^{(k)} + \sum_{q'}\left(-i\delta\theta O_{q'}^{(k)} \langle kq'|\vec{n}\cdot\vec{J}|kq\rangle\right)$$

① $\vec{n}\cdot\vec{J} = J_z$ のとき

$$i\delta\theta\left(O_q^{(k)} J_z - J_z O_q^{(k)}\right)$$

$$= \sum_{q'}\left(-i\delta\theta O_{q'}^{(k)} \langle kq'|J_z|kq\rangle\right)$$

$$= \sum_{q'}\left(-i\delta\theta O_{q'}^{(k)} \hbar q \langle kq'|kq\rangle\right)$$

$$= -i\delta\theta \sum_{q'} O_{q'}^{(k)} \hbar q\, \delta_{qq'}$$

$$= -i\delta\theta\hbar q O_q^{(k)}$$

よって $[J_z, O_q^{(k)}] = \hbar q O_q^{(k)}$

② $\vec{n}\cdot\vec{J} = J_\pm$ のとき

$$i\delta\theta\left(O_q^{(k)}J_\pm - J_\pm O_q^{(k)}\right)$$

$$=\sum_{q'}\left(-i\delta\theta\, O_{q'}^{(k)}\langle kq'|J_\pm|kq\rangle\right)$$

$$=-i\delta\theta\sum_{q'}\left(O_{q'}^{(k)}\langle kq'|\hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\,|kq\pm1\rangle\right)$$

$$=-i\delta\theta\sum_{q'}\left(O_{q'}^{(k)}\hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\,\delta_{q',q\pm1}\right.$$

$$=-i\delta\theta\,\hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\,O_{q\pm1}^{(k)}$$

よって $\underline{[J_\pm, O_q^{(k)}] = \hbar\sqrt{(k\mp q)(k\pm q+1)}\,O_{q\pm1}^{(k)}}$

よって $O_q^{(k)}$ は k階の既約テンソルである。

(c)
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$= \frac{1}{4}2A_x\cdot 2B_x - \frac{1}{4}2iA_y\cdot 2iB_y + A_zB_z$$

$$= \frac{1}{4}(A_+ + A_-)(B_+ + B_-) - \frac{1}{4}(A_+ - A_-)(B_+ - B_-) + A_zB_z$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{A_+B_+} + A_+B_- + A_-B_+ + \cancel{A_-B_-} - \cancel{A_+B_+} + A_+B_- + A_-B_+ - \cancel{A_-B_-}\right) + A_zB_z$$

$$= \underline{\frac{1}{2}(A_+B_- + A_-B_+) + A_zB_z}$$

No. 20111089O
Date

山崎智矢

(d) $\vec{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$

$$\vec{J}^2 T_q^k = \frac{1}{2}J_+ \hbar\sqrt{(k+q)(k-q+1)}\,T_{q-1}^k + \frac{1}{2}J_- \hbar\sqrt{(k-q)(k+q+1)}\,T_{q+1}^k + \hbar^2 q^2 T_q^k$$

$$= \frac{1}{2}\hbar^2\sqrt{(k+q)(k-q+1)}\sqrt{\{k-(q-1)\}\{k+(q-1)+1\}}\,T_q^k + \frac{1}{2}\hbar^2\sqrt{(k-q)(k+q+1)}\sqrt{\{k+(q+1)\}\{k-(q+1)+1\}}\,T_q^k + \hbar^2 q^2 T_q^k$$

$$= \left[\frac{1}{2}\hbar^2\{(k+q)(k-q+1)+(k-q)(k+q+1)\} + \hbar^2 q^2\right] T_q^k$$

$$= \left[\frac{1}{2}\hbar^2\{k^2 \cancel{-kq} + k \cancel{+kq} - q^2 \cancel{+q} + k^2 \cancel{+kq} + k \cancel{-kq} - q^2 \cancel{-q}\} + \hbar^2 q^2\right] T_q^k$$

$$= (\hbar^2 k^2 + \hbar^2 k \cancel{-\hbar^2 q^2} \cancel{+\hbar^2 q^2})\,T_q^k$$

$$= \hbar^2 k(k+1)\,T_q^k \qquad \therefore\ \underline{\vec{J}^2 T_q^k = \hbar^2 k(k+1)\,T_q^k}$$

問題2

(a) $\langle jm|jm\rangle'$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{\{j-(m-1)\}\{j+(m-1)+1\}}}\langle jm|J_+|j\,m-1\rangle'$$

$$= \frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}}\langle jm|J_+|j\,m-1\rangle'$$

$$= \left(\frac{1}{\hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}}J_-|jm\rangle\right)^\dagger |j\,m-1\rangle'$$

$$= (|j\,m-1\rangle)^\dagger |j\,m-1\rangle'$$

$$= \langle j\,m-1|j\,m-1\rangle'$$

→ よって <u>$\langle jm|jm\rangle'$ はmによらない。</u>

(b) $\langle jm|j'm'\rangle = \dfrac{\langle j||T^k_q||j'\rangle}{\sqrt{2j+1}}$ とかいて分子を還元行列要素とする。このとき

$$\langle jm|T^k_q|j'm'\rangle = \frac{\langle j||T^k_q||j'\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle jm|kq\,j'm'\rangle$$

とかける。このように行列要素が幾何学的なmに依存するCG係数とそれ以外に分かれることをWigner-Eckartの定理という。

(c) O_sはスカラー演算子なのでT^0_0と表わせる。(0階テンソル)
Wigner-Eckartの定理から

$$\langle jm|O_s|j'm'\rangle = \langle jm|T^0_0|j'm'\rangle$$
$$= \frac{\langle j||T^0_0||j'\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle jm|00\,j'm'\rangle$$

$\langle jm|00\,j'm'\rangle$について考える。
角運動量 0 と j' の合成であるので

	0
j'	j'
$j'-1$	$j'-1$
$\vdots$	$\vdots$
$-j'+1$	$-j'+1$
$-j'$	$-j'$

合成したJは $J=j'$
Mは $-j' \sim +j'$ である。

よって $|00\,j'm'\rangle = |j'm'\rangle$ なので
$\langle jm|j'm'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$

つまり $j-j' \neq 0$ のときは $\langle jm|j'm'\rangle = 0$

であるので $\langle jm|O_s|j'm'\rangle = 0$ である。

山崎智久. No. 201110890.
Date

(d) Ov は T^1_q $(q=-1,0,1)$ とかける(1階のテンソル)

Wigner-Eckart の定理から.

$$\langle jm|Ov|j'm'\rangle = \langle jm|T^1_q|j'm'\rangle$$

$$= \frac{\langle j\|T^1_q\|j'\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle jm|1qj'm'\rangle$$

$\langle jm|1qj'm'\rangle$ について考える。

角運動量 1 と j' の合成.

	$+1$	0	-1
j'	$j'+1$	j'	$j'-1$
$j'-1$	j'	$j'-1$	$j'-2$
$j'-2$	$j'-1$	$j'-2$	$j'-3$
$\vdots$	$\vdots$		
$-j'+2$	$-j'+3$	$-j'+2$	$-j'+1$
$-j'+1$	$-j'+2$	$-j'+1$	$-j'$
$-j'$	$-j'+1$	$-j'$	$-j'-1$

$\Rightarrow$ 合成した J は

$J = j'+1,\ j',\ j'-1$ の場合がある。

よって $|jm\rangle$ の j が $j'+1,\ j',\ j'-1$ のいずれかでない場合は CG 係数は 0 である。

よって $j-j' \neq 0, \pm 1$ のときは

$$\langle jm|Ov|j'm'\rangle = 0$$ である。

問題3.

(a) $\vec{U}$ がベクトル演算子であるとは

$[J_i, U_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}U_k$ をみたすことをいう。

(b) $\vec{U}$ は1階の既約テンソルなので

$[J_\pm, U^1_q] = \hbar\sqrt{(2\pm q)(1\mp q)}\,U^1_{q\pm1}$ をみたす。

$q=1$ $[J_+, U^1_1] = 0$, $[J_-, U^1_1] = \sqrt{2}\hbar U^1_0$

$q=0$ $[J_+, U^1_0] = \sqrt{2}\hbar U^1_1$, $[J_-, U^1_0] = \sqrt{2}\hbar U^1_{-1}$

$q=-1$ $[J_+, U^1_{-1}] = \sqrt{2}\hbar U^1_0$, $[J_-, U^1_{-1}] = 0$

ここで $[J_-, U_+] = -2\hbar U_z$ $(U_\pm = U_x \pm iU_y)$

なので $U^1_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}U_+$ とおくと $U^1_0 = U_z$ となる。

$[J_+, U_z] = -\hbar U_+$, $[J_-, U_z] = \hbar U_-$ より

$U^1_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}U_-$

以上から $\underline{U_{\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}U_\pm,\quad U_0 = U_z}$ ($k=1$の表記は省略)

とおくと $[J_\pm, U^1_q] = \hbar\sqrt{(2\pm q)(1\mp q)}\,U^1_{q\pm1}$ をみたすので

これらは1階の既約テンソルである。

山崎智矢 No. 201110870
Date

(C) ベクトル演算子は1階のテンソルなので2つのベクトル演算子からは

$1 \otimes 1 = 2 \oplus 1 \oplus 0$ より 2階，1階，0階のテンソル演算子

を作ることが可能である。

(d) レポート問題用紙のCG係数表を用いると

$$T^0_0 = \sum_{q_1 q_2} U^1_{q_1} V^1_{q_2} \langle 1 q_1 , 1 q_2 | k q \rangle$$

$$= U^1_{-1} V^1_1 \frac{1}{\sqrt{3}} + U^1_0 V^1_0 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + U^1_1 V^1_{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} U_- \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} V_+\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} U_+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} V_-\right) - U_z V_z \right\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{2} (U_x - i U_y)(V_x + i V_y) + \frac{1}{2} (U_x + i U_y)(V_x - i V_y) + U_z V_z \right\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{2} \left(U_x V_x + \cancel{i U_x V_y} - \cancel{i U_y V_x} + U_y V_y + U_x V_y - \cancel{i U_x V_y} + \cancel{i U_y V_x} + U_y V_y \right) + U_z V_z \right\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} (U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \vec{U} \cdot \vec{V}$$

(e) $$T^1_1 = U^1_0 V^1_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + U^1_1 V^1_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= U_z \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} V_+\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} U_+\right) V_z \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(U_z V_+ - U_+ V_z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(U_z V_x + i U_z V_y - U_x V_z - i U_y V_z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(U_z V_x - U_x V_z\right) + i\left(U_z V_y - U_y V_z\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\vec{U} \times \vec{V})_y - i(\vec{U} \times \vec{V})_x\right\}$$

$$= -\frac{1}{2} i (\vec{U} \times \vec{V})_+$$

//

$$T^1_0 = U^1_{-1} V^1_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + U^1_1 V^1_{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} U_- \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} V_+\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} U_+\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} V_-\right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{(U_x - iU_y)(V_x + iV_y) - (U_x + iU_y)(V_x - iV_y)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\begin{array}{l} \cancel{U_x V_x} + iU_x V_y - iU_y V_x + \cancel{U_y V_y} \\ -\cancel{U_x V_x} + iU_x V_y - iU_y V_x - \cancel{U_y V_y} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} i \left(U_x V_y - U_y V_x\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} i (\vec{U} \times \vec{V})_z$$

山崎智矢

No. 201110890
Date

$$T^1_{-1} = U^1_{-1} V^1_0 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + U^1_0 V^1_{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} U_-\right) V_z \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + U_z \left(\frac{1}{\sqrt{2}} V_-\right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ U_z (V_x - i V_y) - (U_x - i U_y) V_z \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (U_z V_x - U_x V_z) + i (U_y V_z - U_z V_y) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (\vec{U} \times \vec{V})_y + i (\vec{U} \times \vec{V})_x \right\}$$

$$= \frac{1}{2} i (\vec{U} \times \vec{V})_-$$

よって

$$T^1_1 = -\frac{1}{2} i (\vec{U} \times \vec{V})_+$$

$$T^1_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} i (\vec{U} \times \vec{V})_z$$

$$T^1_{-1} = \frac{1}{2} i (\vec{U} \times \vec{V})_-$$

(f)

$$T^2_2 = U_{+1} V_{+1}$$

$$T^2_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (U_0 V_{+1} + U_{+1} V_0)$$

$$T^2_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} (U_{-1} V_{+1} + 2 U_0 V_0 + U_{+1} V_{-1})$$

$$T^2_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (U_{-1} V_0 + U_0 V_{-1})$$

$$T^2_{-2} = U_{-1} V_{-1}$$