No.

DATE 2013. 9. 2

量子力学3

2011I3019
Chang Maki

回転群

回転操作 ↔ 無限小変換 ～角運動量

回転：くり返せる ～回転操作が群をつくる。

R: 回転 $\vec{r} \to \vec{r}' = R\vec{r}$ $\quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\tilde{R}R = E_3$

R: 直交行列 $O(3)$ $\quad \det R = 1$ $SO(3)$

$R: E_3$（なにもしない）ことから連続変形可。

$R_\alpha(\hat{n})$ $\hat{n}$軸まわりのα回転（回転軸の存在）

$R_\alpha(\hat{n})\hat{n} = \hat{n}$ $\quad$（$\hat{n}$: 回転軸）

Q: 直交行列 $\det Q = 1$

$QR_\alpha\hat{n} = Q\hat{n}$

$\underbrace{QR_\alpha Q^{-1}}_{R'_\alpha = QR_\alpha Q^{-1}}Q\hat{n} \Rightarrow R'_\alpha Q\hat{n} = Q\hat{n}$ $\quad (Q\hat{n} = \hat{n}')$

$(\det R'_\alpha = \det R_\alpha = 1)$ $\quad R'_\alpha \hat{n}' = \hat{n}'$

R'_αの回転軸が$Q\hat{n} = \hat{n}'$

$\tilde{R}'_\alpha R'_\alpha = \widetilde{QR_\alpha Q}\, Q\, QR_\alpha\tilde{Q}$

$= \tilde{\tilde{Q}}\tilde{R}_\alpha \underbrace{\tilde{Q}Q}_{E_3} R_\alpha \tilde{Q}$

$= Q\underbrace{\tilde{R}_\alpha R_\alpha}_{E_3}\tilde{Q} = Q\tilde{Q} = E_3$

$R_\alpha\hat{n} = \hat{n}$

$R'_\alpha\hat{n}' = \hat{n}'$ $\quad \hat{n}' = Q\hat{n}$

$R'_\alpha = QR_\alpha Q^{-1}$ $\quad R'_\alpha = R_\alpha(\hat{n}')$：$\hat{n}'$軸まわりの$\alpha$回転

↖ R_αとR'_αは座標軸を変換したことに対応（回転角は等しい）

回転軸を $\vec{n} \leftrightarrow \hat{n}'$ に移す回転をQ

$R_\alpha \to QR_\alpha Q^{-1}$ となる。

※ Euler（オイラー角）による回転の表示

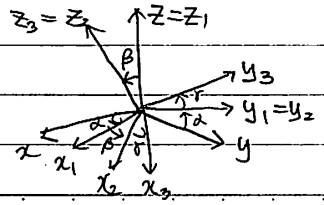
任意の回転 $R_\alpha(\hat{n})$

座標軸まわりの回転の積として表現

① z軸まわりにα回転 (x, y, z)軸 $\longrightarrow$ (x_1, y_1, z_1)軸へ

② y_1 〃 β回転 (x_1, y_1, z_1)軸 $\longrightarrow$ (x_2, y_2, z_2)軸へ

③ z_2 〃 γ回転 (x_2, y_2, z_2)軸 $\longrightarrow$ (x_3, y_3, z_3)軸へ



No.

DATE

α, β, γ : 回転の Euler 角

$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_\gamma(z_2) R_\beta(y_1) R_\alpha(z)$ ← 元の座標軸まわりの回転で"書き直す.

$R_\beta(y_1) = R_\alpha(z) R_\beta(y) R_\alpha^{-1}(z)$ *1

y軸 → y_1軸へ

$R_\gamma(z_2) = R_\beta(y_1) R_\gamma(z_1) R_\beta^{-1}(y_1)$ *2

z_1軸 → z_2軸へ

$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_\beta(y_1) R_\gamma(z_1) R_\beta^{-1}(y_1) R_\beta(y_1) R_\alpha(z)$ (∵*2)

$= R_\beta(y_1) R_\gamma(z_1) R_\alpha(z)$

$= R_\alpha(z) R_\beta(y) R_\alpha^{-1}(z) R_\gamma(z_1) R_\alpha(z)$ (∵*1)

$R_\gamma(z_1) = R_\alpha(z) R_\gamma(z) R_\alpha^{-1}(z)$ *3

$= R_\alpha(z) R_\beta(y) R_\alpha^{-1}(z) R_\alpha(z) R_\gamma(z) R_\alpha^{-1}(z) R_\alpha(z)$ (∵*3)

$= R_\alpha(z) R_\beta(y) R_\gamma(z)$

∴ $R(\alpha,\beta,\gamma) = R_\alpha(z) R_\beta(y) R_\gamma(z)$ おのて元の座標軸まわりの回転.

回転操作, $\hat{n}$軸まわり θ回転 $R_\theta(\hat{n}) = e^{-i\theta \hat{n}\cdot \vec{J}/\hbar}$

オイラー角 (α,β,γ) による表示

$R(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\alpha J_z/\hbar}\ e^{-i\beta J_y/\hbar}\ e^{-i\gamma J_z/\hbar}$

$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k$

* 対称操作 その表現

対称操作 : 群をつくる. 群の表現

R: 対称操作

$R : \psi(\vec{r}) \longmapsto \psi'(\vec{r}) = R\psi(\vec{r}) = \psi(R^{-1}\vec{r})$

$\langle \psi(\vec{r}) | \psi(\vec{r}) \rangle = \langle \psi'(\vec{r}) | \psi'(\vec{r}) \rangle$ 変換で"物理量は変化しない

$|\psi'\rangle = R|\psi\rangle$

$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | R^\dagger R | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$

$\Rightarrow R^\dagger R = 1$ 要求 $R^\dagger = R^{-1}$: unitary.

物理量 Θ

$\langle \psi | \Theta | \psi \rangle = \langle \psi' | \Theta' | \psi' \rangle$

$= \langle \psi | R^\dagger \Theta' R | \psi \rangle$

($\Theta = R^\dagger \Theta' R$, $\Theta' = R\Theta R^{-1}$ 物理量の変換則)

Hamiltonian H が" R で" 不変とする.

$H \longrightarrow H' = RHR^{-1} = H$

$RH = HR$, $[H, R] = 0$ H は R と可換

No.

DATE

Hの固有状態が d重に縮退.

$H|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle E$

$H|\psi_2\rangle = |\psi_2\rangle E$ (d+1重には縮退していない)

$\vdots$

$H|\psi_d\rangle = |\psi_d\rangle E$

$R|\psi_i\rangle$ はどうなる?

$H|\psi_\alpha\rangle = |\psi_\alpha\rangle E$

$RH|\psi_\alpha\rangle = HR|\psi_\alpha\rangle = R|\psi_\alpha\rangle E$

$R|\psi_\alpha\rangle$ もエネルギー Eの固有状態 $\Rightarrow \{|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_d\rangle\}$ の線型結合

$R|\psi_\alpha\rangle = \sum_j |\psi_j\rangle D_{j\alpha} = |\psi_j\rangle D_{j\alpha}(R)$

$\leftarrow D_{j\alpha}$: 線型結合の係数 (Rで決まる)

$R|\psi_\alpha\rangle = |\psi_j\rangle D_{j\alpha}(R)$

$R|\psi_1\rangle = |\psi_j\rangle D_{j1}(R)$

$R|\psi_2\rangle = |\psi_j\rangle D_{j2}(R)$

$\vdots$

$R|\psi_d\rangle = |\psi_j\rangle D_{jd}(R)$

$\Rightarrow R(|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_d\rangle)$

$= (R|\psi_1\rangle, \cdots, R|\psi_d\rangle)$

$= (|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_d\rangle) \begin{pmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1d} \\ D_{21} & \cdots & \vdots \\ D_{d1} & \cdots & D_{dd} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbb{D}$

$\Psi = (|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_d\rangle)$

$R\Psi = \Psi \mathbb{D}(R)$ Rは群をつくる. $R_2 R_1 = \exists R_{21}$

$R_1\Psi = \Psi D(R_1)$

$R_2 R_1 \Psi = R_2 \Psi D(R_1)$

$= \Psi D(R_2) D(R_1)$

$= R_{21}\Psi = \Psi D(R_{21})$

$\Leftrightarrow D(R_2)D(R_1) = D(R_{21})$ $\leftarrow D(R)$

↑行列の積 Rの表現 (行列による表現)

$R_2 R_1 = R_{21}$ 対称操作の間の関係式 (群の元の間の関係)

$eR = R$

$D(e)D(R) = D(R)$

$D(e) = E_d$

$R^\dagger R = e$ 群の表現

$D(R^\dagger) D(R) = D(e) = E_d$

$D(R^{-1}) = [D(R)]^{-1}$ R: unitary $R^\dagger R = 1$

$R\Psi = \Psi D$

$\Psi^\dagger R^\dagger = D^\dagger \Psi^\dagger$

$\Psi^\dagger R^\dagger R \Psi = D^\dagger \Psi^\dagger \Psi D = D^\dagger D$ ($\Psi^\dagger\Psi \rightarrow E_d$)

$\Psi^\dagger\Psi = E_d$

$\therefore D^\dagger D = E_d$, $D^\dagger = D^{-1}$ unitary表現

$|\psi_1\rangle, \cdots, |\psi_d\rangle$: 表現の基底 (関数)