

201110834 赤間 翔太

回転群

回転操作 $\longleftrightarrow$ 無限小変換 $\sim$ 角運動量
 $\longleftrightarrow$ 回転操作が群をつくる

$$R: \text{回転} \quad \vec{r} \mapsto \vec{r}' = R\vec{r}$$

$$\tilde{R}R = R\tilde{R} = E_3$$

$$R: \text{直交行列 } O(3)$$

$$\det R = 1 \quad SO(3)$$

$R: E_3$ (何もしない) 連続変形可

$R_\alpha(\hat{n})$: $\hat{n}$ 軸まわりの α 回転

$$R_\alpha(\hat{n})\hat{n} = \hat{n} \quad \hat{n}: \text{回転軸}$$

$$Q: \text{直交行列} \quad \det Q = 1$$

$$\rightarrow Q \times$$

$$QR_\alpha(\hat{n})\hat{n} = Q\hat{n}$$

||

$$QR_\alpha Q^{-1}Q\hat{n}$$

$$R_\alpha'$$

$$R_\alpha' Q \hat{n} = Q \hat{n}$$

$$R_\alpha' \hat{n}' = \hat{n}'$$

$\Rightarrow R_\alpha'$ の回転軸が $Q\hat{n} = \hat{n}'$

$$\tilde{R}_\alpha' R_\alpha = \tilde{Q} R_\alpha Q Q R_\alpha Q$$

$$= \tilde{Q} R_\alpha Q Q R_\alpha Q$$

$$E_3$$

$$= Q \tilde{R}_\alpha R_\alpha \tilde{Q} = Q \tilde{Q} = E_3$$

$$R_\alpha' = Q R_\alpha Q^{-1}$$

$$\det R_\alpha' = \det R_\alpha = 1$$

$$R_\alpha \hat{n} = \hat{n}$$

$$R_\alpha' \hat{n}' = \hat{n}' \quad \hat{n}' = Q\hat{n}$$

$$R_\alpha' = Q R_\alpha Q^{-1}$$

$\hookleftarrow R_\alpha$ と R_α' は座標軸を変更したことに対応 (回転角は等しい)

$$R_\alpha' = R_\alpha(\hat{n}') \quad \hat{n}' \text{ 軸まわりの } \alpha \text{ 回転}$$

$$Q\hat{n} = \hat{n}'$$

② 軸軸を $\hat{n} \mapsto \hat{n}'$ に移す回転を Q

$$Q: R_\alpha \mapsto Q R_\alpha Q^{-1}$$

★ Euler角による回転の表示

任意の回転 $R(\hat{n})$ を座標軸まわりの積として表現① z 軸まわりに α 回転 (x, y, z) 軸 $\rightarrow (x_1, y_1, z_1)$ 軸 $\uparrow$
 z ② y_1 軸まわりに β 回転 (x_1, y_1, z_1) 軸 $\rightarrow (x_2, y_2, z_2)$ 軸 $\uparrow$
 y_1 ③ z_2 軸まわりに γ 回転 (x_2, y_2, z_2) 軸 $\rightarrow (x_3, y_3, z_3)$ 軸 $\uparrow$
 z_2 α, β, γ : 回転の Euler 角

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(z_3) R_{y_1}(y_1) R_z(z_1)$$

$$R_{y_1}(y_1) = R_z(z_1) R_{y_1}(y_1) R_z^{-1}(z_1) \quad \text{--- *1}$$

 z 軸 $\rightarrow y_1$ 軸 $\uparrow$

$$R_z(z_1) = R_{y_1}(y_1) R_z(z_1) R_{y_1}^{-1}(y_1) \quad \text{--- *2}$$

 z 軸 $\rightarrow z_1$ 軸 $\uparrow$

$$= R_{y_1}(y_1) R_z(z_1) \underbrace{R_{y_1}^{-1}(y_1) R_{y_1}(y_1)}_{E_3} R_z(z_1) \quad (\because *2)$$

$$= R_{y_1}(y_1) R_z(z_1) R_z(z_1)$$

$$= R_z(z_1) R_{y_1}(y_1) R_z^{-1}(z_1) R_z(z_1) R_z(z_1) \quad (\because *1)$$

$$\downarrow R_z(z_1) = R_z(z_1) R_z(z_1) R_z^{-1}(z_1)$$

$$= R_z(z_1) R_{y_1}(y_1) R_z(z_1)$$

$$\therefore R(\alpha, \beta, \gamma) = R_z(z_3) R_{y_1}(y_1) R_z(z_1)$$

すなわち元の座標軸まわりの回転

回転操作 $\hat{n}$ 軸まわりの θ 回転 $R_\theta(\hat{n}) = e^{-i\theta \hat{n} \cdot \mathbf{J}/\hbar}$
オイラー角 (α, β, γ) による表示

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z/\hbar} e^{-i\beta J_{y_1}/\hbar} e^{-i\gamma J_z/\hbar}$$

$$[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$$

★ 対称操作 その表現

対称操作、群をつくる 群の表現

R: 対称操作

$$R: \psi(\mathbf{r}) \mapsto \psi'(\mathbf{r}) = R\psi(\mathbf{r}) = \psi(R^{-1}\mathbf{r})$$

$$\langle \psi(\mathbf{r}) | \psi(\mathbf{r}) \rangle = \langle \psi'(\mathbf{r}) | \psi'(\mathbf{r}) \rangle \quad \text{変換で物理量は変化しない}$$

$$\Rightarrow \langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\langle \psi' | \psi' \rangle = \langle \psi | R^\dagger R | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\Rightarrow R^\dagger R = 1 \quad R^\dagger = R^{-1} : \text{unitary}$$

物理量 O

$$\langle \psi' | O | \psi' \rangle = \langle \psi' | O' | \psi' \rangle$$

$$= \langle \psi | R^\dagger O' R | \psi \rangle$$

$$O = R^\dagger O' R$$

$$O' = R O R^{-1} \quad \text{物理量の変換則}$$

Hamiltonian H が R で不変になる

$$H \mapsto H' = R H R^{-1} = H$$

$$\Rightarrow R H = H R \quad [H, R] = 0 \quad H \text{ と } R \text{ と可換}$$

H の固有状態が d 重に縮退

$$H | \psi_1 \rangle = | \psi_1 \rangle E$$

$$H | \psi_2 \rangle = | \psi_2 \rangle E$$

$$H | \psi_d \rangle = | \psi_d \rangle E$$

$$H | \psi_i \rangle = | \psi_i \rangle E$$

$$R H | \psi_i \rangle = H R | \psi_i \rangle = R | \psi_i \rangle E$$

 $R | \psi_i \rangle$ もエネルギー E の固有状態

$$R | \psi_i \rangle = \sum_j | \psi_j \rangle D_{ji} = | \psi_j \rangle D_{ji}(R)$$

 D_{ji} : 線型結合の係数 (R で決まる)

$$R|\psi_1\rangle = |\psi_j\rangle D_{j1}(R)$$

$$R|\psi_2\rangle = |\psi_j\rangle D_{j2}(R)$$

$$\vdots$$

$$R|\psi_d\rangle = |\psi_j\rangle D_{jd}(R)$$

$$R(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_d\rangle) \\ = (R|\psi_1\rangle, R|\psi_2\rangle, \dots, R|\psi_d\rangle)$$

$$= (|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_d\rangle) \underbrace{\begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1d} \\ D_{21} & \dots & D_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{d1} & \dots & D_{dd} \end{pmatrix}}_{ID}$$

$$\psi = (|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_d\rangle)$$

$$R\psi = \psi D(R)$$

$$R \text{ は群をなす } R_2 R_1 = R_{21}$$

$$R_1 \psi = \psi D(R_1)$$

$$R_2 R_1 \psi = R_2 \psi D(R_1)$$

$$= \psi D(R_1) D(R_2)$$

$$= R_{21} \psi = \psi D(R_{21})$$

$$D(R_2) D(R_1) = D(R_{21})$$

$$\uparrow$$

行列の積

$$R_2 R_1 = R_{21}$$

$$\begin{array}{l} \text{行列操作の間} \\ \text{の関係} \\ \text{(群の元の関係)} \end{array}$$

$$D(R)$$

Rの行列による表現

$$eR = R$$

$$D(e)D(R) = D(R)$$

$$D(e) = E_d$$

$$R^\dagger R = e$$

$$D(R^{-1})D(R) = D(e) = E_d$$

$$D(R^{-1}) = [D(R)]^{-1}$$

$$R: \text{unitary}$$

$$R^\dagger R = 1$$

$$R\psi = \psi D$$

$$\psi^\dagger R^\dagger = D^\dagger \psi^\dagger$$

$$\Rightarrow \psi^\dagger R^\dagger R \psi = D^\dagger \psi^\dagger \psi D = D^\dagger D$$

$$\psi^\dagger \psi = E_d$$

$$\therefore D^\dagger D = E_d \quad D^\dagger = D^{-1}$$

unitary表現

$$|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_d\rangle : \text{表現の基底 (関数)}$$